Научные развлечения

В. Лёвшин и Эм. Александрова

ЧЁРНАЯ МАСКА ИЗ АЛЬ-ДЖЕБРЫ

Путешествие в письмах с прологом

IDMI

Издательский Дом Мещерякова
Москва
2012

Чёрная Маска из Аль-Джебры

Путешествие в письмах с прологом

IDMI

УДК 821.161.1-93Лёвшин
ББК 84 (2Рос=Рус)6-44
Л34

Лёвшин В. А

Л34 Чёрная Маска из Аль-Джебры. Путешествие в письмах с прологом / Лёвшин В. А. и Александрова Эм. Б. ; худ. Н. С. Исаичева. — М. : Издательский Дом Мещерякова, 2012. — 304 с. : ил. — (Научные развлечения).

ISBN 978-5-91045-523-2

Таинственный заколдованный незнакомец не может снять чёрную маску, скрывающую его лицо, и вспомнить своё имя. Чтобы снять чары, нужно расшифровать загадочное письмо и решить особенное уравнение. Поэтому малыш Нулик зовёт на помощь своих друзей: Таню, Севу, Олега и щенка Пончика. Ребята отправляются в страну Аль-Джебру, где им предстоит узнать много нового и интересного, прежде чем станет ясно, кто скрывался под чёрной маской.

УДК 821.161.1-93Лёвшин
ББК 84 (2Рос=Рус)6-44

ISBN 978-5-91045-523-2

ПРОЛОГ

Снова в Карликании!

Трое путешественников шагают по прямым улицам Арабеллы. Их нетрудно узнать, хоть они повзрослели и вытянулись. Это наши давние знакомые — Таня, Сева и Олег. На этот раз их сопровождает маленький пушистый клубок. Клубок то убегает далеко вперёд, то возвращается, то снова надолго исчезает в каком-нибудь закоулке. И тогда слышатся беспокойные возгласы его хозяев:

— Пончик, Пончик, назад!

Пончик — самый весёлый, самый ласковый пёс на свете. Больше всего он любит лаять — не от злости, как иные собаки, а просто потому, что всё вокруг ему нравится.

Пончик очень любопытен: никогда не пройдёт мимо открытой двери, обязательно остановится и осторожно заглянет, но стоит кому-нибудь появиться — сейчас же отойдёт с самым безразличным видом.

От природы Пончик совершенно бел. Правда, для того чтобы это выяснить, надо его хорошенько вымыть. Пончик терпеть не может мыла, зато обожает грязные лужи. Но сейчас он белёшенек. Перед тем как снова отправиться в Карликанию, Сева устроил ему основательную баню. Нельзя же заниматься чистой наукой в таком неопрятном виде! *1

Пончик всей душой хочет вернуться к своему привычному состоянию, но попробуйте найти в Арабелле хоть одну грязную лужу...

Не подумайте, впрочем, что в Карликании вообще нет воды. Тот, кто сказал это, конечно, пошутил.

Город сверкает чистотой. Солнце отражается в его зеркальных, тщательно протёртых стёклах. Газоны только что политы, и на траве дрожат и вспыхивают крупные капли.

Приятно возвратиться в город, в котором уже однажды побывал.

Ребята с удовольствием убедились, что не только сами хорошо помнят столицу Карликании, но и здесь их тоже не забыли. Со всех сторон


2×2=4

тянутся к ним дружелюбные руки. Карликане сердечно приветствуют своих добрых знакомых и наперебой зазывают в гости.

Четвёрка с бантиком приглашает их в Клуб любителей поспорить на очередной двенадцать миллионов тысяча семьсот тридцать первый диспут; Семёрка с палочкой вручает билеты на новое представление. Даже Старший Дробитель, который был так нелюбезен напоследок, вылез из своей подземной дробилки. Он предлагает ребятам покрутить ручку, чтобы получить дробь с каким-то длиннющим периодом...[*2]

Путешественники тронуты. Они благодарят за приглашения. Но им не до развлечений. Мысли их заняты непонятной телеграммой Нулика. Да, да, того самого Нулика, который потерялся и которого нашли потом на школьной лестнице.

Что с ним стряслось? И зачем ему понадобилось вызывать ребят в Карликанию?

— Покажи-ка ещё разок! — озабоченно говорит Сева. — Может быть, мы как-нибудь не так прочитали!

Олег молча подаёт ему аккуратно сложенный листок.

— «Совершенно секретно...» — начинает Сева.

— Не надо, — перебивает Таня, — я могу наизусть: «Совершенно секретно пропало лицо тайна стручке приезжайте на поиски Нулик». А на деле никакой тайны и нет. Просто очередная шалость.

— А если и вправду тайна? — возражает Олег.

— Вот бы славно, — мечтательно улыбается Сева. — Даром, что ли, я взял с собой ищейку!

— Хороша ищейка, — поддразнивает Таня, — её саму искать надо. Вот, например, сейчас: куда она пропала?

— Не беспокойся, найдётся. Лучше объясни, куда запропастился Нулик. Отчего он нас не встретил? Как его найти? Эта задача потруднее.

— Ничего трудного, — снисходительно замечает Таня. — Нулик живёт на Восьмой улице.

— На Восьмой улице живёт не только Нулик, но и его мама. О ней ты подумала? Вот и доверяй после этого тайны девчонкам!

Таня вспыхивает, но не успевает ответить: где-то неподалёку слышится заливистый лай.

— Пончик, ко мне! — зовёт Сева.

Щенок не показывается и упорно продолжает лаять.

— Держу пари, он что-то учуял!

Сделав непроницаемое, «детективное» лицо, Сева идёт на лай.

Таня и Олег следуют за ним.

Очень скоро все они оказываются в том самом саду, где в прошлое посещение Карликании решали задачу с яблоками.

Здесь они видят Пончика. Не переставая лаять, он прыгает под яблоней.

А на самой верхушке её сидит Нулик.

Он никогда ещё не видел ни одной собаки, и маленький белый пёсик показался ему разъярённым чудищем. А Пончику просто-напросто захотелось поиграть с симпатичным малышом, у которого к тому же такой забавный хохолок.

Нулика снимают с дерева и, наскоро познакомив с Пончиком, забрасывают вопросами: кто потерял лицо? О какой тайне речь? И вообще, что произошло?

А произошло вот что.

После того как Нулик потерялся, мама Восьмёрка решила пока что не отпускать своего любимца к людям. Пусть подрастёт!

Бедная мама, если бы она знала, что из этого выйдет!..

От безделья Нулик, который и прежде был порядочным шалуном, совсем от рук отбился. И, в отличие от других Нуликов, его стали называть Нуликом-Озорником.

Вот и вчера, собрав на Числовой площади своих дружков-приятелей, он такое вытворял, что впору было вызывать на помощь Великанов из Бесконечности [*3]. Вы ведь помните, что Нулики только их и боятся по-настоящему. К счастью, до этого не дошло. Просто рассерженные


O

мамы развели своих питомцев по домам, строго-настрого запретив выходить на улицу.

Один только Нулик-Озорник убежал от наказания. Убежал так далеко, что очутился в совершенно незнакомом месте.

Здесь он наконец остановился и, тяжело дыша, посмотрел назад.

Никто за ним не гнался.

Он был один, совершенно один.

На минуту Нулику стало страшно, но любопытство пересилило страх.

В нескольких шагах от себя он заметил большой мшистый камень.

Малыш подошёл к нему и осторожно потрогал. Ему, как и прочим маленьким Нуликам, необходимо было всё трогать руками.

— Ничего особенного! — сказал он независимо. — Может, с другой стороны есть что-нибудь интересное?

Нулик обошёл камень и остолбенел: прямо на него уставилась большая чёрная дыра! Он заглянул в тёмную каменную пасть. Брр! В лицо пахнуло холодом. Постепенно глаза его привыкли к темноте. Он увидел неровные каменные ступеньки, уходившие куда-то вниз. Нулик стал на четвереньки, чтобы заглянуть поглубже, но в это время кто-то легонько хлопнул его по спине. Нулик зажмурился и втянул голову в плечи. Он страсть как перепугался. Зачем, зачем он убежал от мамы Восьмёрки? Велика беда — просидеть три дня дома без сладкого!

Он уже собирался заплакать, но тут его снова шлёпнули, на этот раз посильнее.

— Кто это? — спросил Нулик, дрожа и всё ещё не оборачиваясь.

— Я, — ответил глухой незнакомый голос.

— Кто вы?

— К сожалению, этого я и сам не знаю.

— Вы что, смеётесь? — возмутился Нулик. — Я умираю от страха, а надо мной издеваются! Каждый обязан знать, кто он.

— А вы знаете, кто вы?

— Что за вопрос! Я — Нулик. Это всем известно.

— Счастливый! — позавидовал голос. — А вот кто я, никому не известно.

— Сказки! — осмелел Нулик. Он наконец рискнул обернуться и открыть глаза, но сейчас же зажмурился снова.

Перед ним стояло странное существо, закутанное в чёрный бархатный плащ, из-под которого виднелись две тоненькие ножки. На лице у существа была чёрная повязка.

— Ой, — сказал Нулик, — я боюсь! Где ваше лицо?

— Под маской.

— Так снимите её, — предложил немного успокоенный Нулик и снова взглянул на незнакомца.

— Невозможно, — вздохнул тот. — Я заколдован и обречён носить чёрную маску до тех пор, пока кто-нибудь не раскроет моей тайны.

Тайна?! Нулик даже руками всплеснул от неожиданности.

— Как жаль, что мы не встретились раньше! — пылко воскликнул он. — Ужасно люблю раскрывать тайны.

— В таком случае мне повезло! — Чёрная Маска поклонилась. — Но должен вас предупредить, что мою тайну раскрыть не так-то просто. Готовы ли вы преодолеть все препятствия, которые встретятся вам на пути?

— Что за вопрос! Я-то готов на всё. Но...

— Как? Вы ещё ничего не начали, а у вас уже имеется «но»?

— Что вы, что вы! — всполошился Нулик. — Никакого «но» у меня нет... Но... у меня есть мама...

— Ни слова больше! Никогда не позволю себе стать причиной огорчения вашей мамы. Прощайте.

Незнакомец отвесил печальный поклон и повернулся, чтобы войти в подземелье. Сейчас он исчезнет там навсегда.

— Не уходите! — взмолился Нулик. — Не уходите, пожалуйста! У меня ведь есть ещё и друзья! Это ребята, школьники. Я подружился с ними, когда они были в Карликании.

— Ах, вы возвращаете мне надежду! — обрадовался неизвестный. Но тут же озабоченно спросил: — А на них можно положиться?

— Как на меня самого, — заверил Нулик.

— Ну, так слушайте. Сейчас я передам вам волшебный талисман. С его помощью вы должны одолеть чары и вернуть мне моё лицо. Закройте глаза и протяните руку.

Нулику ужасно хотелось подсмотреть, что будет дальше, но он честно сжал веки. На ладони его очутилось что-то узкое, продолговатое, и глухой голос произнёс:

— Вы вскроете этот талисман только тогда, когда придут ваши друзья. А теперь прощайте. И помните: отныне моя судьба в ваших руках.

Когда Нулик открыл глаза, Чёрной Маски уже не было. А на ладони у него лежал... стручок! Стручок зелёного горошка.

Нулик очень любил зелёный горошек. В другое время он бы съел его не задумываясь. Но от этого стручка зависела чья-то судьба... Малыш посмотрел на него, облизнулся и опрометью кинулся на телеграф.

Комментарии

*1 О первом путешествии ребят в Карликанию можно прочитать в книге В. Лёвшина «Три дня в Карликании». — *Здесь и далее примеч. А. Фёдоровой.*

*2 Когда мы переводим обычную дробь $^a/_b$ в десятичную, при делении в столбик может возникнуть следующая ситуация:

$$
\begin{array}{r|l}
-122 & 99 \\ \cline{2-2}
\underline{99} & 1{,}2323232\ldots \\
-230 & \\
\underline{198} & \\
-320 & \\
\underline{297} & \\
-230 & \\
\underline{198} & \\
-320 & \\
\underline{297} & \\
-230 & \\
\underline{198} & \\
32 &
\end{array}
$$

Получившаяся десятичная дробь начиная с некоторого места представляет собой периодически повторяющуюся группу цифр. Это происходит тогда, когда знаменатель b является произведением простых чисел, отличных от 2 или 5. В нашем примере:

$$99 = 3 \cdot 3 \cdot 11.$$

Такую дробь принято кратко записывать в виде:

$$\frac{122}{99} = 1,(23).$$

Повторяющаяся группа цифр в скобках (в нашем примере 23) называется периодом.

*[3] С *Великанами из Бесконечности* ребята познакомились во время своего первого путешествия в Карликанию (прочитать об этом путешествии можно в книге В. Лёвшина «Три дня в Карликании»). В математике бесконечность некоторого объекта означает невозможность указать для него границы или количественную меру. Например, множество целых чисел бесконечно, потому что для любого целого числа n существует число, большее, чем n (таким числом является $n + 1$); а прямая линия состоит из бесконечного числа точек.

Тайна зелёного стручка

Всё вышло не совсем так, как хотелось Нулику.

Он требовал, чтобы стручок был вскрыт в самой таинственной обстановке: ровно в полночь участники экспедиции сходятся где-нибудь в глухом месте. Все они в чёрных масках и бархатных плащах. У каждого маленький фонарик со свечой внутри...

Что и говорить, это был прекрасный план, но он начал разваливаться с самого начала как карточный домик.

Во-первых, вы уже знаете, что у Нулика не было никакого «но», зато у него была мама. И время встречи как-то само собой передвинулось с двенадцати ночи на восемь вечера. Не лучше получилось и с плащами. Вместо того чтобы явиться в бархатных, ребята пришли в непромокаемых. А уж о фонариках и говорить нечего: взамен трёх оказался один-единственный, да и то электрический.

Нулик перенёс это разочарование довольно стойко и был вознаграждён по заслугам, когда наступил черёд выбирать название отряда.

Предложений было много: «Тайна Чёрной Маски», «Рыцари зелёного стручка», «Охотники за потерянным лицом»...

Но Нулику все они не нравились. Он предложил своё: «Раскрыватели великих тайн». К большой его радости, на том и остановились. Для удобства решили называться сокращённо — отряд РВТ.

Теперь можно было приступить к самому главному.

Нулик достал из кармана талисман и тяжело вздохнул. Ему очень не хотелось с ним расставаться. Но уговор дороже денег! И вот уже стру-

чок у Олега. Тот нажимает большим пальцем на бледно-зелёный шов, стручок лопается...

— Смотрите, ребята, здесь какая-то бумажка!

— А где же горошины?

— Да-да, где горошины? — суетится Нулик.

— Постой, сейчас не до горошин. Сперва посмотрим, что в бумажке. — Сева торопливо разворачивает свёрнутый в трубочку листок.

Вот что там написано:

«Трэялрп вюоп ф нира дфявзоо, жфой Очсмл тфпъзб тэим пзрф уфлцэ йц, идшйн рщднишорм ож уп едж, ож уп шкьехж дхесыэфь, рхасеэфф пчбффбрб а рфбщяем, б Очсмл гкъчшм нпж рхасеэфф усжп, шфп по рщднишорм; ртштн едж дхесыэфь а рфуфяом, б рцнгльйжя фрит гйшйс? Тшязжфл».

— Ничего не понимаю. Чепуха какая-то.

— Может быть, незнакомый язык? — предположила Таня.

— Но буквы-то русские!

— Ну и что ж! В Болгарии тоже пишут русскими буквами.

— Не только в Болгарии, но и в Югославии, и в Азербайджане, и на Украине...

Сева досадливо отмахнулся:

— Я всё равно, кроме русского, никакого не знаю.

Олег взял у него записку и внимательно перечитал.

— Постойте-ка, — сказал он, — в любом языке слова состоят из гласных и согласных букв. А здесь попадаются из одних согласных. Например, «пчбфбрб». Такого и не выговоришь. А в этом слове хоть и есть гласная, но её всё равно что нет: «тшязжфл».

— Ой, — засмеялся Нулик, — у меня язык *слмлся*!

— По-моему, говорить на таком языке невозможно! — сказала Таня.

— А на нём никто и не говорит. — Олег загадочно улыбнулся. — Такого языка вообще нет.

— Что же это? — Таня указала на записку.

— А это — шифрованное письмо.

— Ух ты! — выдохнул Сева. — Ну и голова у тебя!

— Погоди радоваться, — остановила его Таня. — Ведь письмо надо ещё расшифровать.

— Легко сказать. А ключ к шифру? Где его возьмёшь?

Ребята задумались.

Всё началось так удачно — и нá тебе!

Особенно огорчился Сева. В мечтах он уже видел себя прославленным сыщиком, раскрывшим тайну Чёрной Маски. И вот всё рухнуло. Даже знаменитая ищейка Пончик не мог ему ничем помочь.

Кстати, где он?

— Пончик, Пончик, сюда!

Пончик подбежал, добродушно виляя хвостом. В зубах у него белела какая-то бумажка. Уж не новое ли сообщение от Чёрной Маски? Но нет, это всего-навсего телеграмма Нулика, которую Сева обронил по дороге. Теперь он в сердцах скомкал и отшвырнул её в сторону.

Олег поднял и бережно расправил смятый листок.

— Слушайте, — сказал он немного погодя, — какое слово стоит обычно в конце телеграммы?

— Нулик! — обрадовался малыш.

— Это в твоей телеграмме, а в любой другой?

— Конечно, подпись, — сказала Таня.

— Так, может, и эта записка кончается подписью?

— Хоть бы и так. Мы-то всё равно не знаем, чья она.

— Зато мы знаем, что в имени семь букв: «Тшязжфл».

— Кто же мог подписать записку?

— Я знаю! — догадался Нулик. — Маска!

— Не годится. В слове «маска» всего пять букв.

— Не маска, так стручок! — предположила Таня.

— Подходяще. В этом слове как раз семь букв.

Олег вынул карандаш и написал на обороте телеграфного бланка шифрованную подпись, а под ней слово «стручок»:

Т Ш Я З Ж Ф Л
С Т Р У Ч О К

— Вот здорово! Значит, теперь мы знаем целых семь букв из этого шифра: Т — это С, Ш — это Т, Я — Р...

Ребята принялись подставлять буквы в слова, обозначая неразгаданные точками. Вот что у них получилось:

«С..рк.. .... о .... .ор.у.., чо.. ....к со..у. с... .у.о .ок.. .., ..т.. .т...т... .ч .. ..ч, .ч .. т....ч ......о., ...оо ...о... .о..р.., ...к ....т. ..ч ......оо ..ч., то. .. .т...т...; .стс. ..ч ......о. . .о.ор.., ...к..чр о..с ..т..? Стручок».

— Да, — протянул Сева, — маловато.

— Нелепость какая-то, — заметила Таня. — Что это за слово, которое кончается двумя «о»?

— Мороженоо! — закричал Нулик.

— Во-первых, в этом слове девять букв, а в зашифрованном — восемь; а потом, такого слова нет.

— Как это нет, если я его ел? — возмутился Нулик.

— Может, и ел, только не мороженоо, а мороженое.

— А вот и ещё! Знаете вы слово, которое кончается на «чр»? — спросил Сева.

— Нет такого слова.

— Значит, подпись не та. Не стручок.

Олег задумался.

— Подпись-то, может, и та, да шифр другой.

— Что в лоб, что по лбу! — вздохнул Сева. — Тайны стручка нам всё равно не разгадать.

Погоня

Смеркалось.

В Арабелле начали зажигаться огни.

Ребята сидели на обочине шоссе, ведущего к Римским развалинам, и уныло глядели на пустой стручок.

Неожиданно поднявшийся ветер подхватил его и погнал вдоль дороги.

— Держи! Держи! — закричали все и бросились вдогонку.

Куда там!

Стручок нёсся с такой быстротой, что поймать его было невозможно. Он словно дразнил своих преследователей: остановится, подпустит поближе, а потом возьмёт да и ускользнёт из-под самого носа.

Тем временем совсем стемнело, а отважные раскрыватели великих тайн всё ещё бежали за неуловимым талисманом. Впопыхах никто из них не удивился, что теперь стручок светится изнутри зеленоватым светом.

Но вот он сделал крутой поворот и остановился у большого камня. Это была та самая пещера, где Нулик встретил Чёрную Маску. К ней-то и подбежали измученные путешественники.

На этот раз стручок и не думал удирать. Он плавно покачивался в воздухе над входом в подземелье, легко уклоняясь от ловивших его рук.

И тут Нулик не выдержал.

— Послушайте, — сердито закричал он стручку, — это не по-товарищески! Чего вы от нас хотите?

И, как бы в ответ на его слова, стручок сделал круг над головами изумлённых зрителей и... скрылся в подземелье. Следом за ним с яростным лаем кинулся Пончик.

— Пончик, назад! — изо всех сил закричал Сева.

Но не тут-то было! Лай знаменитой ищейки, отражённый сводами подземелья, звучал всё глуше и глуше и наконец затих совсем.

— Что ты наделал? — набросился Сева на Нулика. — Нашёл на кого кричать! Это же волшебный стручок!

— А ведь Нулик прав, — заступился Олег. — Он спросил у стручка, чего тот от нас хочет.

— А стручок обиделся и ушёл.

— И вовсе он не обиделся, а указал, что нам делать.

Таня посмотрела на Олега круглыми, испуганными глазами.

— Как? Неужели мы должны спуститься в подземелье?

— Конечно, если хотим раскрыть тайну Чёрной Маски.

Сева хлопнул себя по лбу. Он всегда так делает, когда что-нибудь вспомнит или придумает.

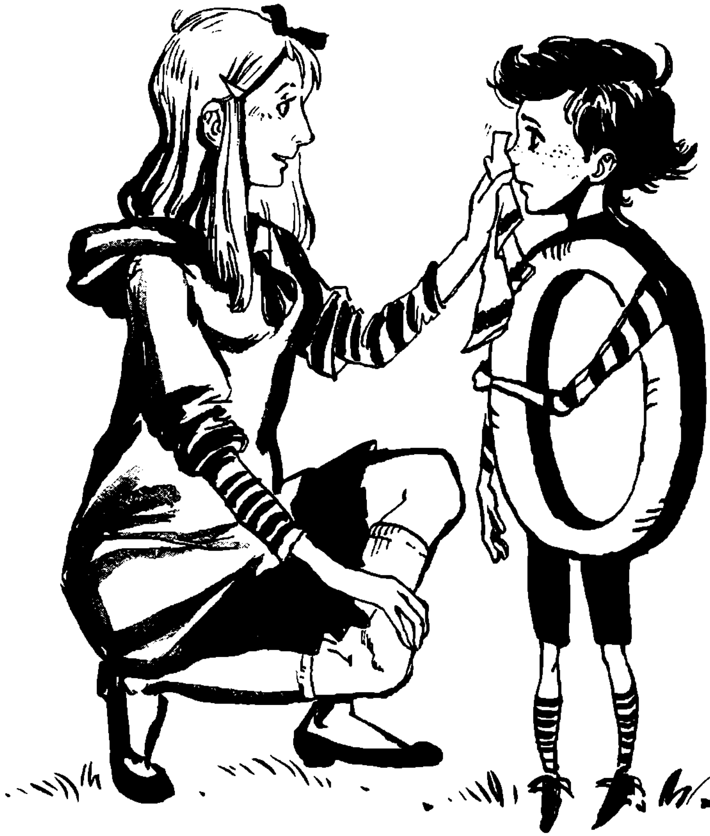
— Какой же я болван! Ищейка идёт по следу, а хозяин стоит и раздумывает!

— Ну как, пошли? — спросил Олег и посмотрел на Таню.

Она немного помедлила, а потом решительно тряхнула головой:

— Пошли!

И тут раздался громкий, отчаянный плач. Это плакал Нулик. Испуганные ребята бросились к нему: в чём дело? Он ушибся? Обиделся? Боится идти в подземелье?



— Нет, нет, нет! — твердил малыш, захлёбываясь и размазывая слёзы.

Таня достала носовой платок и вытерла ему нос и глаза. Она вовремя вспомнила о маме Восьмёрке и сразу всё поняла.

— Ничего не поделаешь, надо тебе отправляться домой.

— Не хочу, не хочу! — ещё пуще заревел Нулик.

— Не плачь! — увещевала Таня. — Мы вернёмся и всё тебе расскажем.

— Да-а-а, — рыдал безутешный Нулик. — Я до тех пор от любопытства умру!

— Не умрёшь, — сказал Олег, — мы тебе с дороги будем посылать письма.

— Подро-о-обные?

— Очень подробные.

— А как же тайна? Вы разве забыли, что письма у нас касаются всех?

— Не волнуйся, письма ты будешь получать прямо в руки, — пообещал Сева.

— Это как же? — Нулик заинтересованно приоткрыл один глаз.

— Тебе их будет приносить Пончик.

Слёзы у Нулика сразу высохли.

— Пончик, Пончик, почтальончик! — в восторге запел он, но тут же спохватился: — Идите, идите скорее, а то вы его не догоните.

Ребята простились со своим маленьким товарищем и скрылись в пещере.

Теперь, когда Нулик остался один, ему снова стало грустно. Он постоял ещё немного, вздохнул и побежал домой.

Переход

(Олег – Нулику)

Дорогой Нулик! Как видишь, слово своё мы держим. Только писать решили по очереди. Начали было сообща, но чуть не перессорились. Ведь нам ещё никогда не случалось писать письма вместе. Поэтому уговорились писать врозь. Но тут мы снова заспорили, кому писать первым. Бросили жребий. Вышло: начинать мне.

Что ж, начинать, так сначала.

Подземелье было узкое, длинное. Сперва мы освещали путь фонариком, но он вскоре погас: Сева забыл переменить батарейку. Ничего не поделаешь, с каждым может случиться...

По правде говоря, все мы порядком струхнули. Пришлось пробираться на ощупь, в полной темноте.

Сколько это продолжалось — не знаю. По-моему, целую вечность. Представляешь себе, как мы обрадовались, когда далеко впереди блеснул яркий дневной свет!

А через минуту поднялся ужасный ураган. Теперь мы уже не шли, а бежали. Нас прямо-таки гнало вперёд. Казалось, мы мчимся внутри огромной трубы. А у входа в неё стоит великан — такой, как в сказке «Мальчик с пальчик», помнишь? — и изо всех сил дует нам в спины.

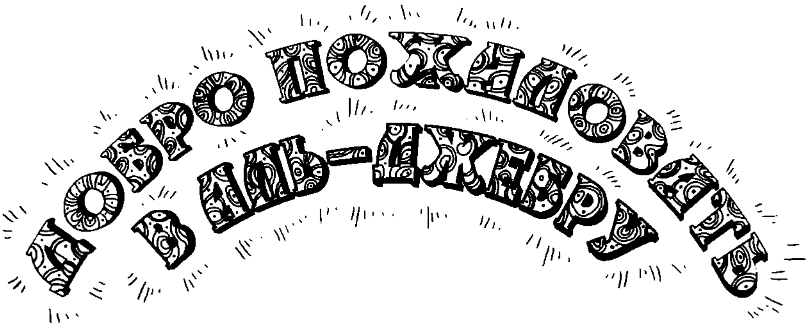
Я слышал, что так испытывают самолёты. Самолёт укрепляют в гигантской трубе. А сквозь трубу пропускают сильную струю воздуха. Если машина не разваливается, то и в полёте с ней ничего не случится.

Мы, во всяком случае, испытание выдержали: нас благополучно выдуло наружу. Сам понимаешь, как все обрадовались, когда очутились наверху.

Сперва глаза наши ничего не различали и только щурились от утреннего солнца. Но потом...

Не хочется тебя разочаровывать, но потом они тоже ничего особенного не увидели. Мы даже подумали, что в темноте незаметно перепутали направление и вернулись обратно в Карликанию. Перед нами была дорога, очень похожая на ту, что ведёт из Арабеллы к подземелью.

Но тут Сева (ты ведь знаешь, как он любит читать вывески!) задрал голову и прочитал:



Тогда и мы с Таней увидали эту странную надпись. Громадные разноцветные буквы выгнулись радугой прямо в воздухе, приглашая в какую-то непонятную Аль-Джебру. Что за Аль-Джебра? Город она? Или целая страна? И как мы пойдём туда без волшебного талисмана?

И досталось же ему, бедняге! Не очень-то вежливо мы о нём говорили. И зря: всё это время стручок преспокойно лежал у меня в кармане. До чего ж я обрадовался, когда нащупал его там вместе с шифрованной запиской!

Теперь можно бы подумать о Чёрной Маске и начать поиски. Но где Пончик? Мы долго звали его, обшарили все кусты — напрасно. Как сквозь землю провалился! Сева и впрямь уверял, что Пончик остался в подземелье, и чуть не уговорил нас идти обратно.

Но только мы повернули, стручок в моём кармане беспокойно заёрзал, а когда я попытался его успокоить, уколол мне ладонь острым хвостиком. Похоже, что предложение Севы ему не понравилось и он не прочь снова удрать. Как тут быть?

Посовещавшись, двинулись дальше. И правильно сделали. Потому что стручок сейчас же успокоился. Он будто знал, что не пройдёт и пяти минут, как Пончик вынырнет из какого-то овражка и бросится нас облизывать.

Как видишь, Нулик, тебе беспокоиться нечего. Сейчас твой почтальон помчится выполнять своё первое поручение. А пока — до свидания. Все тебе кланяются.

Олег.

Обжоры

(Сева — Нулику)

Привет, Нулик! Ты, конечно, ждёшь, что я тебе сразу расскажу про Чёрную Маску. Но мы пока о ней ничего не узнали. Как говорится, никаких следов не обнаружено.

Вообще тайнами здесь и не пахнет. Оказывается, Карликания и Аль-Джебра — дружественные государства.

Удивляюсь, как ты этого не знал? Тут я срисовал для тебя один документ. Такие в Аль-Джебре висят чуть ли не на каждом столбе.

Вот, полюбуйся:

ВЕЛИКИЙ ДОГОВОР

О ВЕЧНОЙ ДРУЖБЕ И СОТРУДНИЧЕСТВЕ

МЕЖДУ ДВУМЯ МОГУЩЕСТВЕННЫМИ

ГОСУДАРСТВАМИ

КАРЛИКАНИЕЙ И АЛЬ-ДЖЕБРОЙ.

А что там дальше, я списывать не стал. На это надо весь день потратить. Я бы и недели не пожалел, если бы всё это имело хоть какое-нибудь отношение к Чёрной Маске. Но, скажи на милость, при чём тут Чёрная Маска?

На каждом шагу натыкаешься на карликан: разгуливают себе почём зря целыми пачками. Многие здесь и живут.

Только что мы побывали в одном карликанском посёлке со смешным названием — Обжоры.

Таня вспомнила, что у нас есть город Ижоры. Я не поверил. Тогда она прочитала стихотворение Пушкина «Подъезжая под Ижоры». То есть не всё стихотворение, а только первые четыре строчки. Но и это, по-моему, лишнее: мы-то ведь попали не в Ижоры, а в Обжоры. Так что нечего хвастаться своей образованностью.

В Обжорах и впрямь живут страшные лакомки: все они без конца что-то жуют.

В посёлке только одна улица, но каждая её сторона имеет своё название: «Обжоры среднеарифметические» и «Обжоры среднегеометрические».

Сначала я не обратил на это внимания. Но оказалось, что между жителями двух сторон большая разница, хоть и те и другие одинаково зазывали нас в гости.

Ну, мы порядком проголодались и отказываться не стали.

Пошли сначала к обжорам среднеарифметическим. И здорово прогадали. Ничем, кроме разговоров, нас не угостили. Под конец им, правда, неудобно стало, и они рассказали, в чём дело.

Все жители у них, ясное дело, работают. Кто лучше, кто хуже, кто больше наработает, кто меньше. Но они на это не смотрят: складывают всё вместе, а потом делят на всех поровну.

У одного, например, на грядке выросло четыре килограмма огурцов, а у другого — девять. Сумма этих чисел равна тринадцати. Тринадцать делят на два. Вот каждый и получает по шести с половиной килограммов огурцов*[1]. Конечно, обжор-то не два, а гораздо больше. Но сколько бы их ни было, они складывают всё, что наработали, сумму делят на число работников, и каждый съедает свою долю до крошки. Где уж тут гостей кормить! Могли бы, правда, оставить кое-что про запас, так нет! На то они и обжоры.

После такого приёма не очень-то хотелось идти к обжорам среднегеометрическим. Но мы всё-таки пошли, и на этот раз нас накормили на славу!

Мы никак не могли понять, в чём дело.

— Может быть, — спрашиваем, — у вас делят не поровну?

— Нет, — говорят, — тоже поровну.

— Так, может быть, — спрашиваем, — вы не обжоры?

— Нет, — говорят, — обжоры.

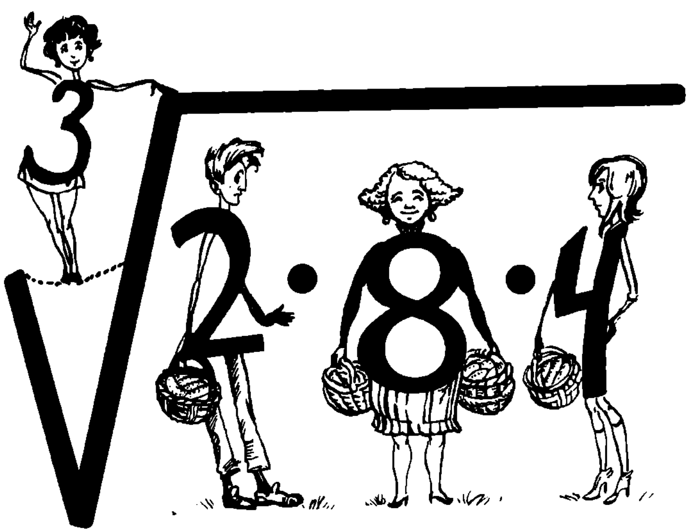
— Откуда же у вас такие запасы?

Тут они нам и объяснили. Дело в том, что собранные продукты они не складывают, а перемножают. То есть не продукты, конечно, а количество их.

Один, скажем, снял с грядки четыре килограмма огурцов, а другой опять-таки девять:

$$4 \cdot 9 = 36.$$

Ты, наверное, думаешь, что тридцать шесть надо разделить на два? А вот и нет. Обжоры среднегеометрические и тут поступают по-своему. Они не делят, а извлекают из полученного произведения корень. Да, да, не удивляйся: у чисел есть корни и их можно извлекать. Об этом нам ещё в прошлый раз рассказала Тройка с чемоданчиком на проспекте Действующих Знаков. Эти самые знаки высыпались у неё из чемоданчика прямо на тротуар.



Помножь три на три. Получится девять. Знаешь, что ты сделал? Ты возвёл три во вторую степень. Если же ты хочешь возвести три в третью степень, помножь его само на себя три раза. Получится двадцать семь. Пятая степень трёх будет уже двести сорок три... *[2]

Так можно возвести число и в сотую, и в двухсотую, и в какую хочешь степень.

А теперь ответь на такой вопрос: какое число нужно возвести во вторую степень, чтобы получить девять? Разумеется, три. Вот это три и есть корень второй степени из девяти.

Стало быть, извлечение корня — действие обратное возведению в степень. Совсем как вычитание — действие обратное сложению, а деление — умножению *[3].

Так вот, из числа тридцать шесть среднегеометрические обжоры извлекают корень квадратный, иначе говоря, корень второй степени. Получается шесть *[4].

Выходит, каждому обжоре досталось по шести килограммов огурцов. Это на полкило меньше, чем получил бы обжора среднеарифметический. Но зато при такой дележке один килограмм остаётся в запасе.

Тут мне пришло в голову, что обжор среднегеометрических тоже ведь не двое, а гораздо больше. Ну и что ж, ответили мне, каждый со-берёт своё количество килограммов, мы все эти числа перемножим...

— И извлечёте корень второй степени? — перебил я.

— Что вы, что вы, — возмутились обжоры, — мы извлечём корень той степени, сколько у нас жителей!

Таня поинтересовалась, как обжоры обозначают такое действие.

Как? Да очень просто: закорючкой, которая похожа на сачок для ловли бабочек и называется радикалом. Только над сачком порхает не бабочка, а число, обозначающее степень корня. И называется оно показателем корня:

$$\sqrt{36} = 6.$$

Если в посёлке четверо обжор, извлекается корень четвёртой степени:

$$\sqrt[4]{}.$$

Ну, а если сто четыре? Тогда и корень будет сто четвёртой степени:

$$\sqrt[104]{}.$$

Ты небось хочешь знать, почему это над радикалом не ставится двойка, когда извлекается корень квадратный? Почему, почему... Просто так уж условились*5.

Из всего, что мы увидели в Обжорах, мы с Таней поняли, что среднее арифметическое всегда больше среднего геометрического. Но Олег сообразил, что вовсе не всегда. Если бы жители Обжор собирали все до одного одинаковый урожай, среднее геометрическое и среднее арифметическое тоже были бы совершенно одинаковы. Не веришь? Я тоже сначала не поверил. Но Олег доказал.

Допустим, двое собрали по восьми килограммов огурцов. Среднее арифметическое найдётся так:

$$\frac{8 + 8}{2} = 8.$$

А среднее геометрическое так:

$$\sqrt{8 \cdot 8} = 8.$$

Вещий Олег!

Среднегеометрические обжоры долго нас не отпускали. Да и нам не хотелось расставаться с такими гостеприимными хозяевами. Но стручок в кармане у Олега так разбушевался, что нам пришлось попрощаться.

Все высыпали нас провожать. Каждый тащил на дорогу что ни попало: кто помидоров, кто яблок... Но вкуснее всего были пирожки. Жаль, ты не попробовал! Всем нам досталось по-разному. Олегу — четыре, Тане — два, а мне —

один. Я, понятно, плакать не стал. Но ребята сами решили разделить пирожки по-честному.

Сначала попробовали делить, как обжоры среднеарифметические. Сложили число пирожков:

$$4 + 2 + 1 = 7.$$

А семь разделили на три. Получилось по два и одной трети пирожка на брата. Не очень-то удобно*[6]. Во-первых, у нас нет ножа. Да если б и был, всё равно разделить пирожок на три равные доли очень трудно. И потом, как же Пончик? Он хоть и маленький, но ведь и ему есть надо!

Тогда решили вычислить среднее геометрическое.

Сначала число пирожков перемножили:

$$4 \cdot 2 \cdot 1 = 8.$$

А потом из восьми извлекли корень третьей степени:

$$\sqrt[3]{8} = 2.$$

Вот и вышло по два пирожка на душу населения. А один остался для Пончика.

В общем, неплохо провели время. Но мне всё равно досадно. Ведь не из-за пирожков мы сюда пришли, а из-за Чёрной Маски! А о ней пока ни гугу. В следующий раз меня в это бешеное подземелье никакими пирожками не заманишь. Будь здоров [*7].

Сева.

Комментарии

*1
$$\frac{4+9}{2} = \frac{13}{2} = 6\frac{1}{2}.$$

*2
$$3 \cdot 3 = 9 = 3^2;$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 = 27 = 3^3;$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81 = 3^4;$$
$$3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 243 = 3^5,$$

т. е.
$$a \cdot a = a^2;$$
$$a \cdot a \cdot a = a^3;$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a = a^4;$$
$$a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^5 \text{ и т. д.}$$

*3 Действия, в которых объект и результат меняются местами, называются в математике обратными. Если выполнить действие, а потом обратное действие, то придём к исходному объекту. Например:

$$\sqrt{5^2} = \sqrt{25} = 5;$$
$$(\sqrt{25})^2 = 5^2 = 25.$$

Или в общем виде:

$$\sqrt{a^2} = a;$$
$$(\sqrt{b})^2 = b.$$

Точно так же прибавление и вычитание одного и того же числа обратны друг другу:

$$(a + b) - b = a;$$
$$(a - b) + b = a.$$

И умножение и деление на одно и то же число обратны друг другу:

$$(a \cdot b) : b = a;$$
$$(a : b) \cdot b = a.$$

*4 $$\sqrt{4 \cdot 9} = \sqrt{36} = 6.$$

*5 Запомним:

$$\text{если } a^3 = b, \text{ то } a = \sqrt[3]{b};$$
$$\text{если } a^4 = b, \text{ то } a = \sqrt[4]{b};$$

$$\text{если } a^5 = b, \text{ то } a = \sqrt[5]{b};$$
$$\text{если } a^n = b, \text{ то } a = \sqrt[n]{b}.$$

Например:

$$3^3 = 27,\ \sqrt[3]{27} = 3;$$
$$3^4 = 81,\ \sqrt[4]{81} = 3;$$
$$3^5 = 243,\ \sqrt[5]{243} = 3.$$

Заметим также, что $(\sqrt[n]{b})^n = b$.
Например, $(\sqrt[3]{27})^3 = 27$.

*6
$$\frac{4 + 2 + 1}{3} = \frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}.$$

*7 Среднее арифметическое n чисел $a_1, \ldots, a_n$ есть сумма этих чисел, поделённая на их количество:

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}.$$

Например, среднее арифметическое двух чисел a и b равно

$$\frac{a + b}{2},$$

а среднее арифметическое трёх чисел a, b и c равно

$$\frac{a+b+c}{3}$$

и так далее.

Вычислим среднее арифметическое чисел 3, 4, 9, 12:

$$\frac{3+4+9+12}{4}=\frac{28}{4}=7.$$

Среднее геометрическое n чисел a_1, ..., a_n есть корень степени n из произведения этих чисел:

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Поэтому среднее геометрическое двух чисел a и b равно

$$\sqrt{a \cdot b},$$

а среднее геометрическое трёх чисел a, b и c равно

$$\sqrt[3]{a \cdot b \cdot c}$$

и так далее. Вычислим среднее геометрическое чисел 3, 4, 9, 12:

$$\sqrt[4]{3 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 12}=\sqrt[4]{1296}=6.$$

Мы знаем, что среднее арифметическое этих чисел равно 7. То есть среднее геометрическое этих чисел меньше их среднего арифметического. Доказательство неравенства для произвольных чисел

$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \leq \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$$

довольно сложное. Поэтому пока просто его запомним. Всякому овощу своё время.

Воздушная монорельсовая дорога

(Таня – Нулику)

Вот, Нулик, наконец наступила и моя очередь писать. Дожидаться пришлось долго, зато есть о чём порассказать. Понимаешь, мы в первый раз побывали на воздушной монорельсовой дороге.

Чтобы тебе зря не ломать голову, скажу сразу: монорельсовая — значит, с одним рельсом. «Монос» — слово греческое и означает «один».

Вообще-то надземные дороги теперь строят всюду. Но эта совсем, совсем особенная. Не знаю только, сумею ли я описать всё как следует. На всякий случай наберись терпения и читай внимательно.

Представь себе, что твоя мама выстирала бельё и хочет его развесить. И вот она берёт верёвку и натягивает туго-натуго прямо в воздухе.

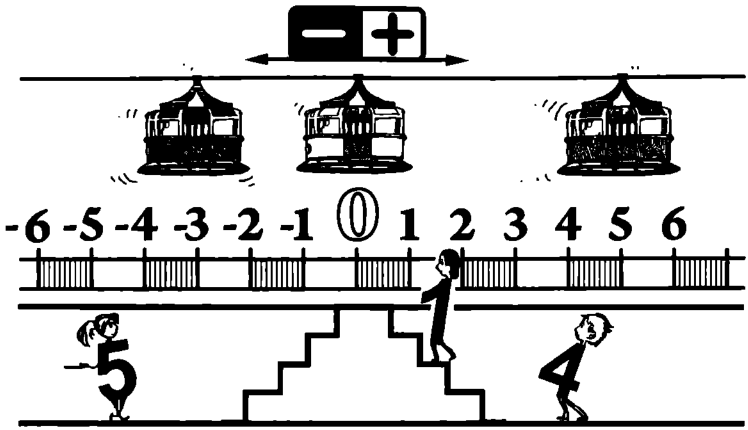
Верёвка такая длинная, что концов её не видно. А вместо белья на ней висят маленькие разноцветные вагончики. Бельё прикрепляют к верёвке зажимом, а у вагончиков имеется для этого специальное колёсико на крыше.

Конечно, мама не смогла бы натянуть такую длинную верёвку. Тем более что это вовсе не верёвка, а стальной рельс, и концы его уходят неведомо куда.

Вдоль рельса, немного пониже, тянется такая же бесконечная платформа, и на ней, совсем как на линейке, на равном расстоянии друг от друга расположены числа по порядку: один, два, три, четыре, пять и так далее. К каждому числу с земли ведёт узкий эскалатор. Разница в том, что числа на линейке откладываются только вправо от нуля, а здесь и влево. А между двумя единицами светится большой нуль, точь-в-точь как буква «М» над станциями метро. Это Нулевая станция.

Когда мы подошли к ней, было ещё довольно рано.

Мы поднялись на пустынную платформу и стали прогуливаться вдоль невысокой ограды, которая состоит из тоненьких палочек. От нечего делать начали их считать. На том месте, где находится число, палочка чуть повыше, вслед за ней — девять палочек пониже. Против следующего числа — снова палочка повыше. И так без конца.



Мы отошли уже довольно далеко вправо от Нулевой станции, как вдруг позади послышался детский плач. Обернулись: возле эскалатора, обозначенного числом 2, сидели две маленькие Двоечки. На них были прехорошенькие ситцевые платьица в горошек (обязательно сошью себе такое!), и обе они горько плакали. Мы подошли и спросили, что у них стряслось.

— Мама задала нам задачу, — сказала одна из них, — а она не решается!

— Не решается! — повторила другая.

И обе снова заплакали.

Прелестные малышки! Мне так жалко их стало! Я спросила, какая такая задача. Оказалось, она и впрямь чудна́я: вычесть из двух три. Мы подумали, что малыши перепутали и вычесть надо из трёх два.

— Нет, нет, — закричала первая Двоечка, — из трёх два — это мы умеем.

— Это мы умеем, — сейчас же отозвалась другая.

Мы очень рассердились на маму, которая мучает детей такими ужасными задачами. Но мама никого и не думала мучить. Она просто отлучилась куда-то ненадолго и вскоре появилась на платформе.

Это была симпатичная Двойка. Она приветливо поздоровалась, и Сева (ох уж этот Сева!) с места в карьер попросил её рассказать, как устроена воздушная монорельсовая дорога. Я незаметно дёрнула его за куртку — неудобно всё-таки! Но Двойка охотно согласилась стать нашим экскурсоводом.

— Ведь устройство этой дороги, — пояснила она, — имеет прямое отношение к тем правилам, которые я собираюсь растолковать моим близняшкам.

Вместе с ней мы снова подошли к Нулевой станции и увидели большой щит с множеством кнопок и клавиш. Как это мы его раньше не заметили? Кроме кнопок, там были ещё микрофоны.

Хочешь знать, для чего всё это нужно? Сейчас объясню.

Я ведь уже говорила, что эта дорога особенная. Здесь нет ни расписаний, ни запасных путей, ни депо. Никаких кондукторов, диспетчеров, кассиров, проводников... даже поездов. Каждый пассажир может в любое время вызвать вагончик и ехать куда вздумается. Станции здесь не имеют названий. Они обозначаются числами. Захочешь поехать на станцию номер 2782 — нажимаешь кнопку «Вызов» и говоришь в микрофон нужное число. И тут же, как Сивка-Бурка, вещий каурка, на Нулевой станции появляется совершенно бесцветный прозрачный вагончик, такой прозрачный, что сразу его и не заметишь. Садишься в него и через несколько секунд попадаешь туда, куда нужно.

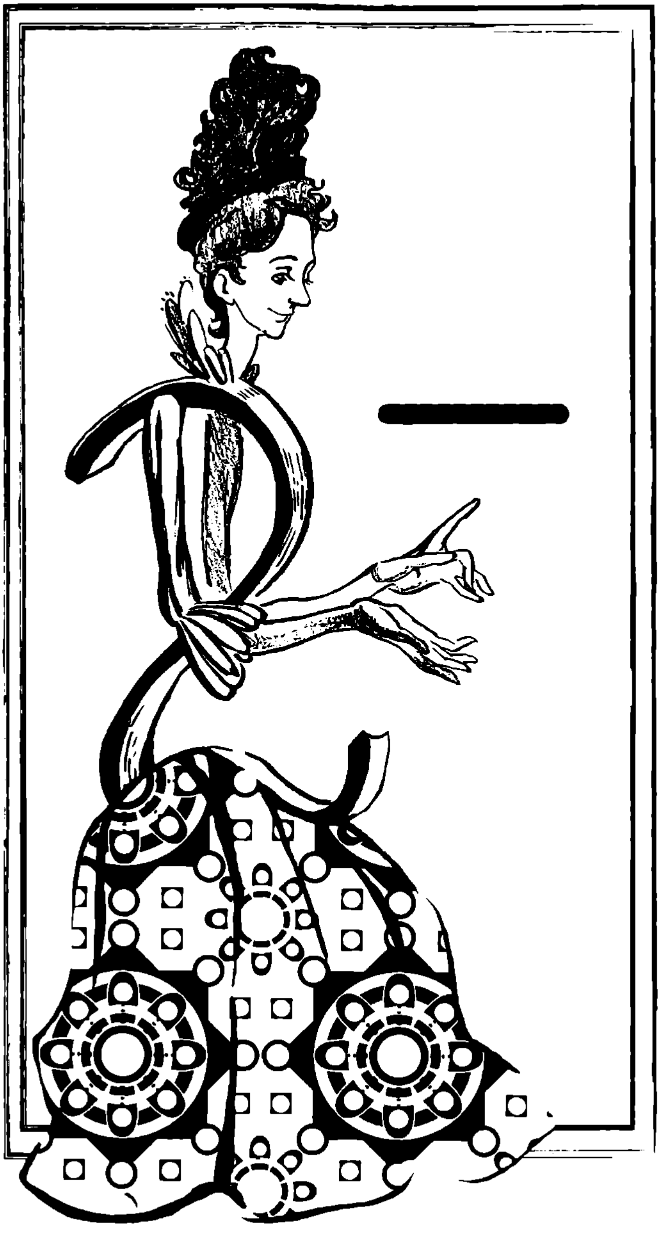
— Очень хорошо! — обрадовался Сева. — Вот я вызову вагончик и поеду на станцию... ну, скажем, 75!

Он нажал кнопку и назвал число. На Нулевой станции сейчас же появился прозрачный вагончик. Сева хотел в него войти, но мама Двойка живо оттащила его назад.

— Что вы делаете? — закричала она в ужасе. — Разве вам туда можно?

— А что? Это же совсем недалеко! Станция 75.

— Да, 75, но не вправо, а влево от нуля! Вы случайно задели рычаг, переключающий направление.



Она указала на большой минус, загоревшийся в воздухе слева от светящегося нуля.

— Знаете вы, что это такое?

— Минус!

— Не просто минус, а светофор, открывающий путь к отрицательным числам. И вам туда ни в коем случае нельзя.

— Но почему? — огорчились мы.

— Да потому, что отрицательные числа — воображаемые числа. И свободный проезд влево от нуля разрешён только нам, карликанам.

— Значит, мы туда никогда не попадём?

— Отчего же, — улыбнулась Двойка, — только для этого вам понадобится другой транспорт: воображение.

Все сразу приуныли, но мама Двойка заметила, что воображаемое путешествие иной раз ничуть не хуже настоящего. Нашего Севу это, конечно, не устраивало.

— На что нужны воображаемые числа — числа, которых не существует?

— Что вы такое говорите? — возмутилась мама Двойка. — Да ещё при маленьких! Дети, не слушайте!

Двоечки послушно отвернулись.

— Отрицательные числа очень нужны, — продолжала мама Двойка, — и я это сейчас докажу. Дети, можете повернуться.

Двоечки не заставили себя упрашивать.

— Вам было задано: вычесть из двух три. Решили вы мою задачу?

— Мы решали, но она не решается! — сказала первая.

— Не решается! — подтвердила вторая.

— Тогда я покажу вам, как это делается. Сейчас, — добавила мама Двойка, обращаясь к нам, — вы увидите, что на нашей дороге не только ездят, но и учатся производить разные действия с числами.

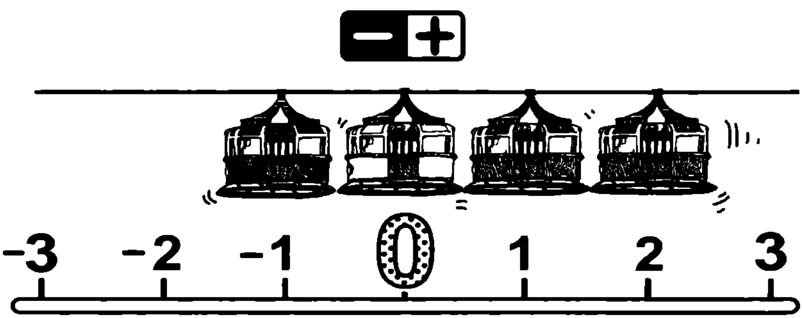
Она прикоснулась к кнопке и негромко сказала в микрофон:

— Два!

Справа от Нулевой станции зажёгся знак плюс и против числа 2 на монорельсе появился вагончик, на этот раз не прозрачный и не бесцветный, а ярко-красный.

— Начнём вычитать из двух три. Сперва вычтем один.

Двойка нажала кнопку, и вагончик передвинулся влево, на станцию 1.



— Теперь вычтем ещё один.

Раз — и вагончик исчез.

— Вот ничего и не осталось! — позлорадствовал Сева.

— Как это — не осталось! — возразила Двойка. — Посмотрите получше.

И мы увидели, что на Нулевой станции вагончик есть. Только из красного он превратился в бесцветный и прозрачный. Оттого мы его и не заметили.

Но Севу не так-то легко смутить.

— Ну и что ж, — сказал он, — пусть вагончик на нуле есть, но ведь нуль — это ничто, пустое место!

— Тут-то вы и неправы! — улыбнулась Двойка. — Нуль тоже число.

— Хоть бы и так, — горячился Сева, — но он всё-таки меньше единицы. Как же из него эту самую единицу вычесть?

— Сейчас увидите.

Двойка нажала ещё какие-то кнопки. Слева от светящегося нуля вспыхнул знак минус. И не успели мы глазом моргнуть, как вагончик очутился слева от Нулевой станции точно против числа минус единица. Только теперь из бесцветного и прозрачного он уже стал синим.

— Вот вам решение. Два минус три равно минус единице:

$$2 - 3 = -1.$$

Понятно вам теперь, для чего нужны отрицательные числа? *[1]

Сказать по правде, мы ещё ничего не понимали. Просто нам всем понравилось смотреть, как ловко вагончики меняют цвета. Особенно Севе.

— Можно и мне повычитать? — спросил он и, не дожидаясь разрешения, приступил к делу.

Сначала вычел из трёх пять — получил минус два:

$$3 - 5 = -2.$$

Потом из семи одиннадцать. Получилось минус четыре:

$$7 - 11 = -4.$$

Мы с Олегом тоже несколько раз попробовали. И каждый раз слева от нуля загорался знак минус, а красный вагончик, миновав Нулевую станцию, превращался в синий и останавливался против какого-нибудь отрицательного числа.

— Интересно! — сказал Олег. — Из пяти вычесть три — получится два, а из трёх пять — тоже два, только со знаком минус. Значит, вычесть из меньшего числа большее — это всё равно что вычесть из большего меньшее. Надо только перед разностью поставить знак минус. Очевидно, — добавил он, — знаки плюс и минус не имеют в этом случае ничего общего со знаками сложения и вычитания.

— Не забегайте вперёд, — посоветовала Двойка. — А чтобы не было путаницы, советую вам на первых порах ставить знаки положительных и отрицательных чисел не слева от числа, а над ним. Вот так:

$$\overset{+}{2} - \overset{+}{3} = \overset{-}{1}.$$

Мама Двойка хотела продолжать своё объяснение, но в это время Сева чихнул. Раз, другой, третий... Вечно на него что-нибудь нападает некстати — то смех, то насморк. Он полез за носовым платком — из кармана у него выпал зелёный стручок. Все мы сразу помрачнели, потому что вспомнили про Чёрную Маску. Если так пойдёт дальше, ходить ей век заколдованной.

Тут, откуда ни возьмись, со страшным лаем вылетел Пончик. Он за кем-то гнался. Этот кто-то бежал так быстро, что рассмотреть его мы не успели. Пробегая мимо щита, незнакомец нажал кнопку, крикнул что-то в микрофон и вскочил в вагончик. В окне мелькнуло лицо, наполовину скрытое чёрной маской, и вагончика как не бывало.

— Держите! — закричал Сева. — Это он! Это она!

Мы бросились к щиту, чтобы вызвать другой вагончик и догнать беглеца, но в это время стручок взмыл в воздух и стал с такой быстротой кружиться перед нами, что нажать кнопку не было никакой возможности. Мы отмахивались от него, как от назойливой мухи, а он всё кружился, кружился...

— Он не желает, чтобы мы уезжали, — вздохнул Олег.

Хочешь не хочешь, пришлось подчиниться. Стручок тотчас угомонился, и Сева снова спрятал его в карман.

Мама Двойка отнеслась к этому происшествию совершенно спокойно. Она и не думала спрашивать о причине переполоха, только сказала, ни к кому не обращаясь:

— Всякому овощу своё время!

И ушла, пообещав скоро вернуться и объяснить правила движения на монорельсовой дороге. Так мы и не поняли, о чём это она: то ли о стручке, то ли о Чёрной Маске!

Что было дальше, узнаешь из следующего письма. А пока веди себя прилично: не забывай, что ты теперь не просто Нулик, а действительный член отряда РВТ!

Таня.

Комментарии

*1 Впервые отрицательные числа вошли в обиход в Древнем Китае не позднее II века до нашей эры. Для них имелось особое название *фу*, в то время как положительные числа называли *чжэн*. Числа *фу* и *чжэн* записывались чернилами разного цвета.

Отрицательные числа обозначали долг. Например, если крестьянин занимал перед посевом 2 горсти риса у соседа, то считалось, что у него в этот момент –2 горсти риса (долг в 2 горсти). Если крестьянину удавалось собрать урожай в 100 горстей риса, то после возвращения долга у него было

$$-2 + 100 = 98$$

горстей риса. По-другому это можно записать так:

$$\overset{-}{2} + \overset{+}{100} = \overset{+}{98}.$$

С VII века отрицательные числа начинают применять при расчётах в Индии, где они тоже обозначали долг. Первый индийский математик, использовавший в своих трудах отрицательные числа, — Брахмагупта.

В Древнем Египте, Вавилоне и Древней Греции не использовали отрицательные числа. Исключением был Диофант, греческий учёный, живший в III веке. Но он рассматривал отрицательные числа лишь как промежуточный этап, полезный для вычисления окончательного, положительного результата.

Первое описание отрицательных чисел в европейской литературе появилось у купца из богатого итальянского города Пизы Леонарда Пизанского, более известного под прозвищем Фибоначчи. По торговым делам Леонардо объездил Сирию, Северную Африку, Испанию и Сицилию, пополняя свои знания при любой возможности. Около 1202 года он написал «Книгу об абаке», являвшуюся подлинной энциклопедией математических знаний народов, живших на берегах Средиземного моря. В «Книге об абаке» отрицательные числа трактовались как числа для записи денежного долга. Но повсеместное признание отрицательных чисел началось только в XVII веке с появлением аналитической геометрии, когда отрицательные числа получили наглядное геометрическое представление на числовой оси (примером которой является монорельсовая дорога). Строгая теория отрицательных чисел была создана только в XIX веке Уильямом Гамильтоном и Германом Грассманом.

Школа на Числовой площади

(Нулик — отряду РВТ)

Здравствуйте, ребята! Пишет вам Нулик. Ваши письма получил. Большое спасибо. Про Чёрную Маску я маме ничего не говорил. Но, по-моему, она кое о чём догадывается. Недавно, например, сказала, что за последнее время мой культурный уровень очень повысился и что меня просто нельзя узнать. Но я думаю, что ещё не очень изменился, потому что Пончик узнаёт меня сразу.

Что у меня вправду переменилось, так это имя. Я уже больше не Нулик-Озорник. Теперь меня зовут Нулик-Профессор. Я открыл на Числовой площади школу для Нуликов. Они почти совсем не шалят, а учатся. Все мои ученики внимательно слушают ваши письма, и я объясняю непонятные места. Каждое письмо мы прочитали по нескольку раз. Пишите поскорей дальше, а то мне уже нечего объяснять и придётся ни с того ни с сего объявить каникулы.

Недавно у нас были практические занятия. Нулик-Сластёна принёс четырнадцать пирожных. А у нас в школе пятнадцать Нуликов. Одному не хватило. И я сказал, что ему досталось отрицательное пирожное. Он заплакал и сказал: почему это всем положительные, а ему

2,3,4,5,6,7
14 пирожных
15 нуликов

отрицательное? И нам стало его жалко. Тогда я вспомнил про ваших обжор. Решили разделить пирожные по среднеарифметическому способу. Это было очень трудно, но мы всё-таки разделили. Каждому досталось поровну, а вот по скольку — я уже забыл. Хотел спросить у моих учеников, да побоятся потерять свой а ф т о р е т е т.

Ах да! Я очень расстроен. Как это вы упустили Чёрную Маску? Не подумайте, что я хвастаюсь, но со мной бы этого не случилось. Пока до свидания.

Действительный член отряда РВТ,
Нулик-Профессор.

Совсем забыл спросить: зачем нужны отрицательные числа?

Правила движения

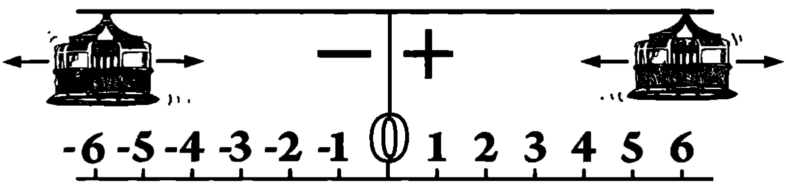
(Олег — Нулику)

Уважаемый Профессор! Тебе пришла в голову отличная мысль — занять своих товарищей полезным делом. Советую только: перед тем как что-нибудь объяснять другим, самому сперва хорошенько в этом разобраться. Вот лучший способ не потерять авторитета. Что же касается а ф т о р е т е т а, то потерять его нельзя, потому что такого слова нет.

Если ты послушаешься меня, никому из твоих учеников не придётся есть отрицательные пирожные. Отрицательными бывают только числа. И числа эти очень нужны. Без них многие задачи в Аль-Джебре так бы и остались нерешёнными. Ты это мог понять хотя бы из той задачи, которую мама Двойка задала своим маленьким дочкам. Задача была простая. Но в Аль-Джебре есть и посложнее. Их здесь называют уравнениями. Мама Двойка сказала, что нам их пока решать рано. Сперва надо как следует познакомиться с правилами движения на монорельсовой дороге.

Как раз о них она сегодня и рассказывала.

Ты ведь помнишь, что справа от Нулевой станции живут только положительные числа, а слева — отрицательные. Так вот, отрицательные числа, так же как и положительные, можно складывать, вычитать, умножать и делить. Вагончики движутся там по тем же правилам, что и у положительных чисел, только всегда в противоположном направлении. Уж очень они упрямы, отрицательные числа. Всё у них наоборот!



Тут я нарисовал тебе, как мы складывали и вычитали положительные числа:

$$\overset{+}{5} + \overset{+}{3} = \overset{+}{8};$$

$$\overset{+}{5} - \overset{+}{3} = \overset{+}{2}.$$

Против числа пять появлялся красный вагончик. При сложении он двигался вправо от пяти на станцию 8, а при вычитании — влево от пяти на станцию 2.

С отрицательными числами происходило то же самое, только в обратном направлении:

$$\overset{-}{5} + \overset{-}{3} = \overset{-}{8};$$
$$\overset{-}{5} - \overset{-}{3} = \overset{-}{2}.$$

При этом против отрицательного числа пять появлялся синий вагончик, при сложении он переезжал влево — на станцию минус 8, а при вычитании вправо — на станцию минус 2.

— Понятно, — сказал Сева. — Но что будет, если одно слагаемое положительное, а другое — отрицательное?

— Какое же это имеет значение? — пожала плечами Двойка. — Правило движения во всех случаях одно и то же. Прибавляем положительное число — вагончик движется вправо, прибавляем отрицательное — влево. Вот смотрите:

$$\overset{-}{5} + \overset{+}{3} = \overset{-}{2};$$
$$\overset{+}{5} + \overset{-}{3} = \overset{+}{2}.$$

— Гм! — Сева недоумевающе поднял брови. — Чудно как-то... Пять плюс три равно двум! Что-то я не очень понимаю такое сложение. Может, лучше повычитаем?

— Можно и повычитать, — согласилась мама Двойка. — Отнимем из минус пяти плюс три:

$$\overset{-}{5} - \overset{+}{3}.$$

Она нажала кнопку. Слева от нуля на станции минус 5 появился синий вагончик, который сейчас же покатился влево и остановился у станции минус 8 *[1].

— Час от часу не легче! — ещё больше удивился Сева. — Вычитаем из пяти три и получаем восемь! Разве при вычитании числа увеличиваются?

— Не забывайте, что мы вычитали не из пяти, а из минус пяти, — ответила мама Двойка, — и получили не восемь, а минус восемь! А ведь минус восемь вовсе не больше, а меньше, чем минус пять!

— Вот те раз! Ничего не понимаю!

— Сейчас поймёте. Чем ближе положительное число к Нулевой станции, тем оно меньше. Но при этом оно всё-таки больше нуля. Так ведь? А числа, расположенные слева от Нулевой станции (то есть отрицательные числа), меньше нуля. И становятся всё меньше и меньше, чем дальше они от Нулевой станции. Ведь у них всё наоборот! *[2]

— Что же это, минус миллион меньше, чем минус тысяча?

— Конечно.

— Выходит, минус миллион на столько же меньше нуля, на сколько плюс миллион больше его, — сообразила Таня.

— Молодец! — похвалила мама Двойка. — Но так как оба миллиона находятся на одинаковом расстоянии от нуля, принято говорить, что они равны по абсолютным значениям. И записывается это так:

$$|\overset{+}{1\,000\,000}| = |\overset{-}{1\,000\,000}|$$ [*3].

— А это что за чёрточки? — поинтересовался Сева.

Двойка насмешливо улыбнулась:

— Что-то вроде загонов, куда посадили числа, чтобы они не подрались.

— А чего они не поделили?

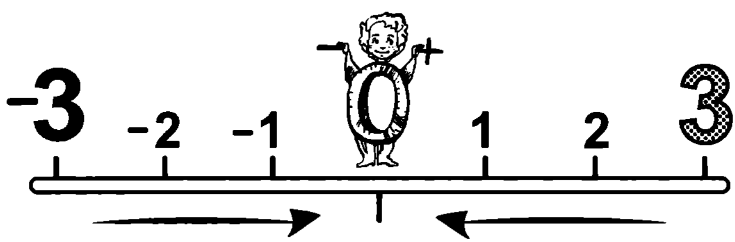
— Видите ли, положительные и отрицательные числа хорошо знают, какая между ними разница. Они терпеть не могут, когда их приравнивают по абсолютным значениям. Стоит их выпустить из загонов и сложить, как они тут же накинутся друг на друга и взаимоуничтожатся.

Она нажала какие-то кнопки, и на монорельсе появились сразу два вагончика: на станции плюс 3 — красный, на станции минус 3 — синий. Вагончики двинулись навстречу друг другу. Вот они достигли Нулевой станции и превратились в один бесцветный прозрачный вагончик.

— Чудо! — закричал Сева.

— Ну, если и чудо, то самое обыкновенное! — засмеялась наша провожатая. — Просто к числу три прибавлялась отрицательная тройка, вот красный вагончик и поехал влево. А к числу минус три прибавлялась положительная тройка. И синий вагончик поехал вправо. А так как абсолютные значения этих чисел одинаковы, они взаимоуничтожились на Нулевой станции:

$$\overset{+}{3} + \overset{-}{3} = 0.$$



Ну, дорогой Профессор, не знаю, как у тебя, а у нас от всех этих премудростей головы вспухли. Хорошо ещё чуткая мама Двойка заметила, как мы устали, и предложила нам немного погулять.

Мы очень обрадовались, потому что она обещала повести нас в здешний парк.

На этом кончаю.

Следующее письмо тебе напишет Сева.

Олег.

Комментарии

[*1] Если мы отнимаем положительное число, то вагончик движется влево, отнимаем отрицательное — вправо.

[*2] При сравнении двух чисел (неважно, положительных, отрицательных или разного знака) бо́льшим считается то число, которое находится правее на монорельсовой дороге, и меньшим — число, которое находится левее:

$$-3 < 5;$$
$$-100 < -99;$$
$$3 < 12;$$
$$-8 < 2;$$
$$-1\,000 < 0.$$

[*3] Абсолютное значение числа a равно числу a, если a — положительное число, и равно $0 - a$, если a — отрицательное. Например:

$$|5| = 5;$$
$$|-4| = 0 - 4 = 4.$$

То есть абсолютное значение числа — это расстояние на монорельсовой дороге от числа до нулевой станции.

Центральный Парк Науки и Отдыха

(Сева — Нулику)

Здоро́во, Профессор! Ты, наверное, уже привык, что о Чёрной Маске ни слуху ни духу. Зато других новостей сколько угодно.

До сих пор не могу понять, что за государство такое Аль-Джебра! Уж очень оно разнообразное. То попадаешь в большой современный город, то в какой-то древний восточный городишко с узкими улочками, где не то что два троллейбуса — два осла не разойдутся! И называется этот городишко Хива́.

Когда-то он был здесь столицей, потому что больше тысячи лет назад в нём жил основатель Аль-Джебры, Мухамме́д ибн Муса́ аль-Хоре́зми*[1]. Не пугайся: имя хоть и длинное, но разобраться можно. Ибн Муса значит «сын Мусы», по-нашему — отчество. Аль-Хорезми — читай «из Хорезма». Хорезм — древнее государство, где находилась эта самая Хива. А в общем — Мухаммед Мусович Хорезмиец.

Ну, с Мухаммедом мы всё выяснили. А вот что такое Аль-Джебра? Нам сказали, что это слово арабское и в переводе на русский язык означает «восстановление». Пусть так, но что здесь восстанавливают? На этот вопрос мама Двойка ответила своей любимой поговоркой: «Всякому овощу своё время». И пояснила, что из слова «Аль-Джебра» вышло название той самой науки, которую проходят у нас в каждой школе: алгебра. Вот те на! Отдохнули! Нигде от науки спасения нет. Даже парк, куда привела нас мама Двойка, называется Центральным Парком Науки и Отдыха. Я сразу скис. Но оказалось, что не так уж он плох, этот парк. Здесь столько аттракционов, что со всеми за один раз не познакомишься.

В парке полно народу. Кроме карликан, там разгуливают и буквы. Что-то часто они стали нам встречаться. Некоторых мы уже видели, но попадаются и совсем неизвестные. Мама Двойка со многими здоровалась и называла по имени: «Здравствуйте, дорогой Пи! Как вы себя чувствуете, уважаемая Омега? Ах, как я давно тебя не видела, крошка Эпсилон!»

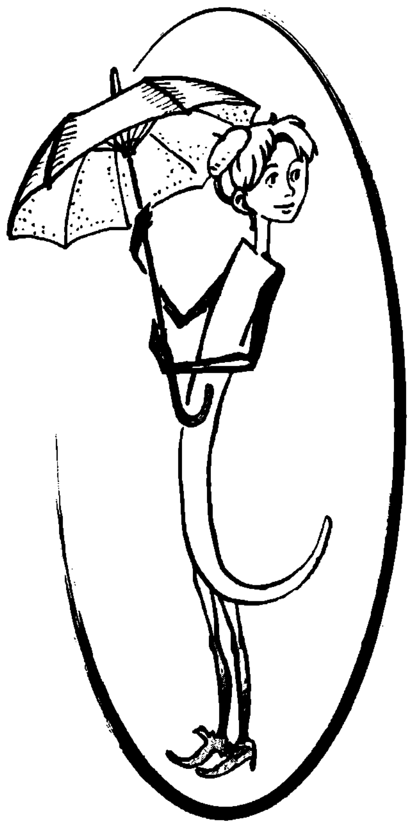
Мы хотели разузнать об этих буквах получше, но мама Двойка, как на грех, разговорилась с какой-то толстушкой Сигмой. Тут мы увидели павильон с вывеской: «Автоматическая справочная». Вот где нам ответят на все вопросы!

Поднялись по широким ступенькам и очутились в большом светлом помещении. Там всюду стоят пластикатные щиты. На каждом щите микрофон и динамик. Подходишь к микрофону, задаёшь вопрос и тут же получаешь ответ.

В Аль-Джебре, как и у вас в Карликании, секретов нет. Каждый может слышать, что автомат отвечает соседу.

Рядом с нами стояла какая-то непонятная буковка с маленьким красным зонтиком: *i*. Мы слышали, как она грустно спросила:

— Скажите, пожалуйста, найду ли я место в жизни?



Автомат призадумался, а потом ответил:

— И Мнимая Единица может на что-нибудь пригодиться.

Мнимая Единица облегчённо вздохнула и выпорхнула из павильона. Ты что-нибудь понимаешь, Профессор? Мало нам отрицательных единиц, так тут ещё появились мнимые!

Мы решили больше ничего не слушать и приступили к делу. Олег подошёл к микрофону и спросил:

— Скажите, пожалуйста, как нам разгадать тайну Чёрной Маски?

— Нет ничего проще! — ответил автомат. — Для этого нужно решить одно уравнение.

— Какое?

— То, которое вы сами составите.

— Но как это сделать?

— Прочтите записку, которая была в зелёном стручке.

— А как её расшифровать?

— Закусите в кафе «Абракадабра».

— Как туда попасть?

— Для этого надо познакомиться с обычаями нашей страны.

— Мы уже познакомились, — не выдержал я.

— Молодой человек, — вспылил автомат, — вы даже не успели до конца разобраться в правилах движения на монорельсовой дороге!

— Как это — не успели? — обиделся я. — Мы уже знаем сложение и вычитание положительных и отрицательных чисел.

— И это все?! А умножение? А деление? А дробные числа? А мнимые? А...

И тут он пошёл говорить такие слова, каких я и не слыхивал. Мы стали переспрашивать. Тогда автомат ещё пуще раскипятился:

— Вот видите! Вы не понимаете самых обыкновенных вещей. Нет, нам положительно не о чем разговаривать!

И замолчал. Напрасно мы задавали ему всякие вопросы, он и ухом не повёл. Но Таня всё-таки его разжалобила — девчонки это умеют.

— Милый автомат, — сказала она, — не сердитесь, пожалуйста! Мы ведь ещё такие неопытные. Лучше помогите нам!

Автомат нерешительно хмыкнул...

— Так и быть, — проворчал он. — Возьмите с подноса жетон и опустите в щель под динамиком.

Наконец-то! Сейчас мы узнаем тайну зелёного стручка!

Я так разволновался, что никак не мог опустить жетон. И всё зря. Из широкого отверстия в щите выпали две картонки. На них были фотографии тех самых букв, которых мы видели в парке. На каждой фотографии по две буквы.

АЛЬ - ДЖЕБРА

АВТОМАТИЧЕСКАЯ СПРАВОЧНАЯ

ЛАТИНСКИЙ АЛФАВИТ

Aa	Bb	Cc	Dd	Ee	Ff	Gg	Hh	Ii	Jj
а	бэ	цэ	дэ	э	эф	гэ	ха	и	йот
Kk	Ll	Mm	Nn	Oo	Pp	Qq	Rr	Ss	
ка	эль	эм	эн	о	пэ	ку	эр	эс	
Tt	Uu	Vv	Ww	Xx	Yy	Zz			
тэ	у	вэ	дубль-вэ	икс	игрек	зэт			

моментальная фотография

Одна большая, другая маленькая. А внизу — имя. Ну прямо как на ежегодном снимке учеников нашего класса.

Я чуть не заплакал с досады. Но автомат (и как он только всё замечает?) заворчал, что на первый раз хватит и этого и что, пока мы не будем знать каждую букву в лицо и по имени, лучше нам к нему не обращаться.

— Почтенный автомат, — сказал Олег, — мы готовы выучить всё что угодно, но объясните, пожалуйста, что это за буквы?

— Так бы и спрашивали, — подобрел тот, — от этого я никогда не отказываюсь. На первой картонке вы видите основных жителей Аль-Джебры — двадцать шесть букв латинского алфавита. Этот алфавит употребляется во многих странах. Ведь он был принят ещё в Древнем Риме, и многие народы пользуются им до наших дней.

Поэтому тем из вас, кто изучает какой-нибудь иностранный язык — английский, немецкий, французский, — эти буквы уже знакомы. Зато вряд ли вы знаете буквы, изображённые на другой картонке.

Это двадцать четыре представителя греческого алфавита. В Аль-Джебре они встречаются не так уж часто, но знакомство с ними вам ещё пригодится.

Ну, мы рассмотрели и те и эти фотографии. Латинские буквы ничего себе, а греческие мне не особенно понравились. По-моему, они ужасные кривляки. Взять хотя бы Кси: прямо змея!

А потом за нами пришла мама Двойка. Мы простились с автоматом и вернулись на монорельсовую дорогу, чтобы раз и навсегда разделаться с этими трудными правилами воздушного движения.

Напоследок я успел опустить в щель ещё один жетон и снова получил две картонки с фотографиями. Посылаю их тебе: пригодятся для следующих уроков.

А пока – кси-пси! Привет.

Сева.

Комментарии

*[1] Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми — великий математик, астроном и географ, живший в первой половине IX века. Сведений о жизни учёного сохранилось крайне мало. Родился он предположительно в Хиве, хорезмском городе на территории современного Узбекистана. Значительный период своей жизни аль-Хорезми провёл в Багдаде, возглавляя при халифе аль-Мамуне библиотеку Дома Мудрости. Аль-Хорезми известен прежде всего своей «Книгой восстановлений и противопоставлений», от названия которой произошло слово «алгебра». Книга была переведена в XII веке на латинский язык и сыграла очень важную роль в развитии математики в Европе. Под непосредственным влиянием этого труда находился выдающийся европейский математик XIII века Леонардо Пизанский.

Аль-Хорезми также принадлежит сочинение «Об индийском счёте», способствовавшее популяризации десятичной позиционной системы записи чисел во всём халифате, вплоть до Испании, а позже и в Европе. Имя автора в латинизированной форме (Algorithmus) стало обозначать в средневековой Европе всю систему десятичной арифметики; отсюда берёт начало современный термин «алгоритм», впервые использованный Лейбницем.

Нулики подрались

(Нулик — отряду РВТ)

Здравствуйте, ребята! Не знаю, может, вы и правы, что отрицательных пирожных не бывает, зато отрицательные Нулики встречаются. Сегодня утром один такой отрицательный Нулик напал на другого, который до сих пор считался очень положительным. Ну и драка была! Ещё немного — и они бы взаимоуничтожились. Я уж думал, не рассадить ли их по разным загонам — ну, как эти самые... абсолютные значения. Но тут их растащили другие Нулики. Из этого я сделал вывод, что положительный Нулик только прикидывался положительным. На деле он самый что ни на есть отрицательный! И я им обоим поставил по поведению жирный минус.

В нашей школе занятия продолжаются.

Греческие буквы трудные. Мы их пока отложили. Зато латинский алфавит всем понравился. Только как туда попали русские буквы? И почему некоторые из них называются по-другому: Р — Пэ, В — Бэ? А вот О молодчина! И там и тут пишется одинаково. Это потому, что оно похоже на меня [*1].

Если снова побываете у автомата, непременно спросите: куда ведёт воздушная монорельсовая дорога? Не к тем ли Великанам, которых вызывают, когда мы безобразничаем? И где эти Великаны живут? Справа или слева от Нулевой станции?

Нулик-Профессор.

Комментарии

*1 И латинский, и русский алфавиты произошли от греческого. Поэтому в них довольно много совпадающих букв, обозначающих схожие звуки. Вопрос о буквах *P* и *B* более сложный. Попробуем рассказать, например, историю буквы *B*.

Около 863 года по приказу византийского императора Михаила III братья Кирилл и Мефодий создали славянскую азбуку. Так на Руси появился кириллический алфавит, являющийся основой алфавитов многих славянских языков, в том числе русского. В византийском варианте греческого языка буква *бета* соответствовала звуку *в*. Поэтому в кириллице, а потом и в русском алфавите закрепилось соответствие буквы *B* звуку *в*. Так как в византийском греческом не было буквы для обозначения звука *б*, создателям кириллицы пришлось ввести для этого звука отдельную букву *Б*, начертание которой восходит либо к одному из алфавитов Ближнего Востока, либо к одному из вариантов раннесредневековой строчной латинской *b*.

В тесноте, да не в обиде

(Таня – Нулику)

Бедный, бедный Нулик! Ну и каша у тебя в голове! Сначала изобрёл какие-то отрицательные пирожные, потом – положительных и отрицательных Нуликов!

Запомни раз и навсегда: нуль – единственное число, которое не бывает ни положительным, ни отрицательным. Это что-то вроде пограничника, который стоит на рубеже между положительными и отрицательными числами.

Конечно, в твоей школе тоже есть положительные и отрицательные Нулики. Но это ведь совсем другое дело. Просто одни из них хорошие, а другие – плохие.

Второй твой вопрос – о Великанах – очень интересный. Но ответил на него не автомат, а мама Двойка. Она говорит, что ты любознательный ребёнок.

Оба конца монорельсовой дороги и вправду ведут в Бесконечность. А в Бесконечности, понятно, живут числа – Великаны. Бесконечность тоже бывает положительная и отрицательная. Только там свои, особые законы. Положительные и отрицательные Великаны прекрасно уживаются. Но как это им удаётся, мы не узнали. Это как раз один из тех вопросов, на которые мама Двойка отвечает: «Всякому овощу своё время».

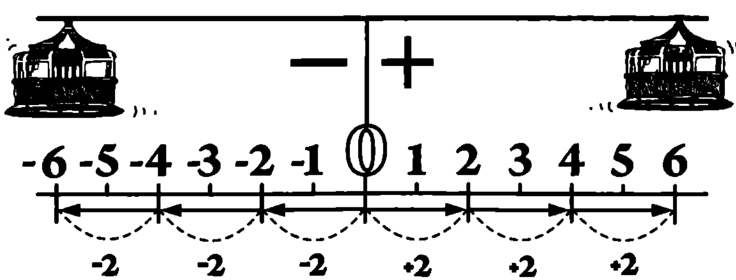
А теперь танцуй! Мы научились умножать и делить отрицательные числа.

Ты ведь знаешь, что умножение можно рассматривать как сложение. Умножить два на три — всё равно что сложить три двойки:

$$\overset{+}{2} \cdot \overset{+}{3} = \overset{+}{2} + \overset{+}{2} + \overset{+}{2} = \overset{+}{6}.$$

То же самое происходит, когда отрицательное число умножают на положительное. Разве умножить минус два на плюс три — это не то же самое, что сложить три отрицательные двойки? А так как при сложении отрицательных чисел вагончики двигаются влево от Нулевой станции, то и произведение будет отрицательное — минус шесть:

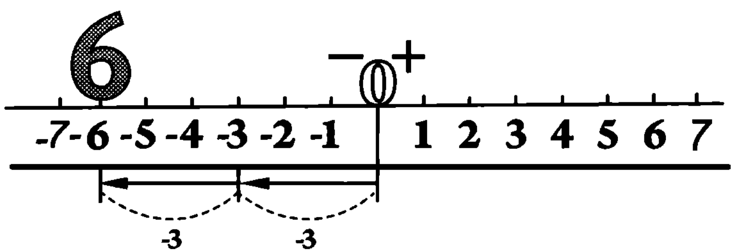
$$\overset{-}{2} \cdot \overset{+}{3} = \overset{-}{2} + \overset{-}{2} + \overset{-}{2} = \overset{-}{6}.$$



— Ну, а если умножить минус три на плюс два? — спросил Сева. — Тогда что?

— Какая же разница? — сказала мама Двойка. — Как было минус шесть, так и останется минус шесть. Вот смотрите:

$$\overset{-}{3} \cdot \overset{+}{2} = \overset{-}{3} + \overset{-}{3} = \overset{-}{6}.$$



— Ясно! — кивнул Сева. — Пусть себе множители меняются знаками сколько хотят, произведение всё равно остаётся то же. Оно всегда будет отрицательным, если мы перемножаем два числа с разными знаками. — Сева важно посмотрел на всех. Он был страшно собой доволен. — Все поняли? Тогда поехали дальше. Выясним теперь, что получится, если оба множителя отрицательные?

— Ну что ж, выясняйте, — сказала мама Двойка, — мы с удовольствием вас послушаем.

— Вы меня не поняли, — смутился Сева. — Это я вас собирался послушать.

— Ах вот оно что! Тогда другое дело.

Всем нам стало неловко за Севу. Мы подумали, что мама Двойка обиделась, но она посмотрела на нас смеющимися глазами и продолжала:

— Вы хотели знать, что происходит при перемножении двух отрицательных чисел? Нетрудно догадаться. Чтобы умножить любое число на положительное, надо отложить его на монорельсе в ту же сторону от Нулевой станции, с какой оно находится. Это мы только что видели.

Когда же мы умножаем любое число на отрицательное, всё происходит наоборот. Вы ведь знаете, какие упрямцы эти отрицательные числа! Поэтому умножаемое откладывается не с той стороны, где оно находится, а по другую сторону от нуля:

$$\overset{+}{2} \cdot \overset{-}{4} = \overset{-}{8}.$$

Теперь нетрудно понять, что получится при умножении отрицательного числа на отрицательное; в этом случае умножаемое надо откладывать вправо от нуля:

$$\overset{-}{2} \cdot \overset{-}{4} = \overset{+}{8}.$$

— Вот те раз! — Брови у Севы стали прямо как два вопросительных знака. — Отрицательное число, умноженное на отрицательное, становится положительным?! Чудеса!

— Такие чудеса случаются у нас в Аль-Джебре на каждом шагу, — ответила мама Двойка.

— Ну, если так, расскажите нам поскорее про деление. Там, наверное, будут какие-нибудь новые чудеса?

— Ничуть не бывало. Деление — действие, обратное умножению. Стало быть, и правила знаков не меняются:

$$\overset{-}{6} : \overset{+}{3} = \overset{-}{2};$$
$$\overset{-}{6} : \overset{-}{3} = \overset{+}{2}.$$

Мы почувствовали себя ужасно образованными. А пуще всех — Сева.

— Теперь нам всё нипочём! — заявил он. — Мы знаем эту дорогу как свои пять пальцев!

— Ошибаетесь, — сказала мама Двойка, — вы познакомились только с целыми числами.

— А разве здесь есть и другие?

— А как же!

— Вы, наверное, подразумеваете дробные числа, — предположил Олег.

— Не только. Дробные числа — это те, что расположены между целыми числами. — Мама Двойка указала на палочки ограды, которые мы недавно пересчитывали. — Здесь расстояние между двумя целыми числами разделено на десять равных частей. Каждая из них составляет одну десятую единицы. Но ведь этих делений может быть и гораздо больше. Мысленно мы можем разделить это расстояние на любое число частей.

— Значит, вагончик может останавливаться не только у целого числа, но и у любой дроби, то есть между станциями?

— Ну конечно! В любом месте, по первому требованию!

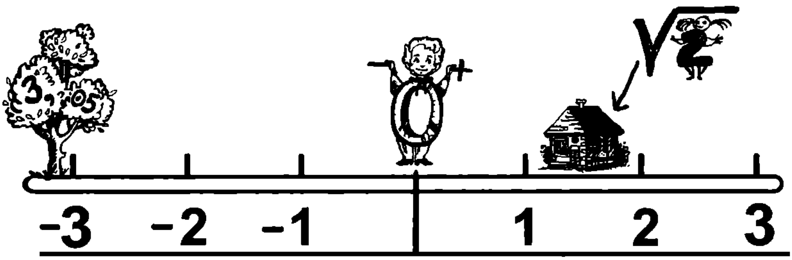
Мы тут же вызвали вагончик и заставили его остановиться сперва против числа 2,5, а потом против 3,44... Этого нам показалось мало. Мы назвали число минус пять и четыре миллионных: –5,000 004, и красный вагончик, миновав Нулевую станцию, превратился в синий и остановился на волосок дальше станции минус 5.

— Выходит, — неуверенно сказал Сева, — вся эта бесконечная дорога сплошь заполнена числами?

— Именно сплошь! — ответила мама Двойка. — Можно сказать, непрерывно. У нас очень большая плотность населения. На всём пути не сыскать ни одной точечки, не заселённой каким-нибудь числом. Есть среди этих чисел и такие, величину которых мы никогда не можем вычислить точно.

— Что ж это за число, которое нельзя вычислить?

— Ну хотя бы корень квадратный из двух: $\sqrt{2}$. Попробуйте найти число, которое при возведении в квадрат давало бы два.



Сева наморщил лоб, подумал немного, потом махнул рукой и засмеялся:

— И много таких чисел?

— Бесконечное множество. Их называют иррациональными в отличие от рациональных. Латинское слово «рацио» значит «разум». Следовательно, рациональные числа — это разумные числа, то есть числа, постижимые разумом.

Сева прямо задохнулся от смеха:

— Ой, умираю! Рациональные — значит разумные. А иррациональные — сумасшедшие, что ли?

— Ну зачем же так! — обиделась мама Двойка. — Просто они не поддаются точному вычислению. Поэтому их долгое время не признавали числами. Но с тех пор как у нас появилась воздушная монорельсовая дорога (или числовая прямая — так её называют по-другому), иррациональные числа после долгих скитаний получили наконец точный адрес. Вычислить их по-прежнему можно только приближённо. Зато легко указать место на монорельсовой дороге, где они живут. Вместе с числами рациональными они образуют дружную семью действительных чисел, — закончила мама Двойка и снова заставила нас удивиться*[1].

— А разве бывают и недействительные?

— Конечно. Есть числа мнимые, есть комплексные...

Сева не дал ей договорить.

— Вспомнил! — заорал он. — И Мнимая Единица может на что-нибудь пригодиться!

— Да, да, — подтвердила я, — так ответил автомат маленькой буковке с зонтиком: *i*.

— Оно и понятно, — сказала мама Двойка, — латинской буквой *i* (по-русски — И) в Аль-Джебре обозначается Мнимая Единица.

— Но почему мнимая? Она что, воображаемая?

— Настолько воображаемая, что ей, как и другим мнимым числам, не нашлось местечка на всей бесконечной монорельсовой дороге.

— Так вот почему она была такая грустная! — смекнул Сева.

— А где же тогда живут мнимые числа? — спросил Олег.

— Всякому овощу своё время.

Пришлось спрятать любопытство в карман. Мы распрощались с мамой Двойкой и пошли... Куда бы ты думал? Конечно, в Парк Науки и Отдыха.

Как мы там отдыхали, узнаешь из следующего письма.

Таня.

Комментарии

*1 Математики выделяют на числовой прямой следующие множества чисел:

- натуральные числа: 1, 2, 3, 4, 5, 6 и так далее;

• целые числа: ... $-6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$;

• рациональные числа — все дроби, у которых числитель — целое число, а знаменатель — натуральное. Заметим, что любое целое число является рациональным, так как может быть записано в виде дроби со знаменателем 1.

• иррациональные числа — это те числа на числовой прямой, которые нельзя записать как рациональную дробь.

Примерами иррациональных чисел являются $\sqrt{2}$ и число π.

Вместе рациональные и иррациональные числа составляют множество действительных чисел, то есть множество всех чисел числовой прямой.

Молотобойцы

(Сева – Нулику)

Здравствуй, старик! Не удивляйся, что вместо Олега пишу тебе я. Мне так захотелось самому рассказать, как я здорово отличился, что он уступил мне свою очередь.

Говорят, великие люди занимались физическим трудом и спортом. Лев Толстой косил траву, шил сапоги. Учёный Павлов играл в городки. А я решил стать молотобойцем.

Здесь в парке есть занятный аттракцион — силомер. Такие встречаются и у нас, но этот устроен немного по-другому.

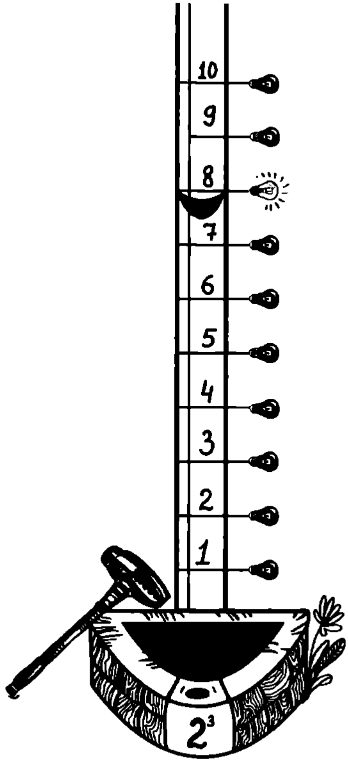
У нас ударяешь молотом по наковальне, и гирька подскакивает вверх. Чем сильнее ударишь, тем выше она поднимется. На таком силомере меряются силами. На здешнем — знаниями.

Рейка, вдоль которой движется гиря, очень похожа на монорельсовую дорогу. Только числовая прямая здесь расположена по-другому: не в длину, а в вышину. И числа на ней, начиная с нуля, только положительные. На этом силомере возводят числа в степень.

Задумываешь число, возводишь в уме в какую-нибудь степень, а потом, чтобы проверить себя, бьёшь молотком по наковальне. Гирька долетает до вычисленной степени. Если ты возвёл правильно, у этого числа зажигается зелёный огонёк, ошибся — красный.

Первый удар предоставили Тане. Ничего не поделаешь: девочка! Она возвела два в третью степень. У неё получилось восемь. Таня стукнула молотком, гирька взлетела к восьмёрке, и зажглась зелёная лампочка*[1].

Потом стукнул Олег. Он возвёл два в десятую степень. Получилось 1 024. И когда гирька доле-



тела до этого числа, снова зажглась зелёная лампочка*2.

Всё это показалось мне очень уж обыкновенным. Захотелось отмочить что-нибудь такое, чтобы все ахнули. Я объявил, что сделаю удар в честь моего друга Нулика-Профессора.

Возвёл двойку в нулевую степень. У меня получился нуль.

Я изо всей силы трахнул молотком по наковальне, и — ха-ха! — гирька осталась на нуле.

Этого-то я и хотел! Но как же я удивился, когда вместо зелёного огонька зажёгся красный! Может быть, я так сильно ударил, что силомер испортился? Но почему же тогда все кругом засмеялись?

Я не знал, что и подумать, но тут какая-то латинская буковка — не то Эн, не то Эм — сказала, что таких ошибок у них даже дети не делают и что любое число, возведённое в нулевую степень, всегда равно не нулю, а единице. Я несколько раз проверил это на силомере — правильно! И пять, и сто, и двести — все они в нулевой степени равны единице[*3].

Тогда я решил возвести в нулевую степень нуль. Я рассуждал так: коли нуль — это число, а все числа в нулевой степени равны единице, то и нуль в нулевой степени тоже равен единице. Ударил по наковальне и...

Лучше бы я этого никогда не делал!

Гирька словно взбесилась: сперва взвилась под облака, потом ушла куда-то под землю, потом опять взмыла вверх. И так она металась туда-сюда, пока кто-то не догадался выключить силомер.

Тут уж никто не смеялся. У всех были испуганные лица — почти как на том представлении, где твой тёзка, Нулик, стащил знак умножения. Я и сам-то перепугался дó смерти.

Страшнее всего было то, что гиря всё время куда-то проваливалась. Оказалось, числовая прямая уходит другим концом в бездонный колодец, где помещаются отрицательные числа.

Наверное, у меня был очень несчастный вид, потому что та же буква — не то Эм, не то Эн — подошла ко мне и стала утешать.

— Успокойтесь, — сказала она, — так может быть со всяким, кто впервые в Аль-Джебре. Нуль и в самом деле число, но совсем особенное. Вы ведь помните, что оно не бывает ни положительным, ни отрицательным. Поэтому обращаться с ним надо осторожно. А когда возводишь нуль, да ещё в нулевую степень, нужно быть осторожным вдвойне. Потому что при этом получается неопределённое число. Оно может быть и пятёркой, и миллионом, и бесконечностью, и положительным, и отрицательным, и даже нулём! Поэтому гирька до того растерялась и разнервничалась, что силомер испортился.

Славная буковка! Мне захотелось сказать ей что-нибудь приятное. Вообще-то у меня это плохо получается. Но я вовремя вспомнил, как моя тётя Нина разговаривает с гостями.

— Ах, ах, это в высшей степени интересно! — сказал я самым что ни на есть разлюбезным голосом.

— Благодарю вас, — засмеялась буковка. — Но не советую употреблять выражение «в высшей степени» в Аль-Джебре. Как бы ни была высока степень, всегда найдётся ещё более высокая. Ведь числа бесконечны.

Эх, подвела меня тётя!

Тут силомер снова наладили, и Тане вздумалось возвести число не в целую степень, а в дробную.

— Если возвести четыре в половинную степень, по-моему, получится два, — сказала она.

— С чего это ты взяла? — спросил я.

— А вот с чего: четыре в нулевой степени равно единице. Четыре в первой степени — четырём. Значит, четыре в половинной степени равно половине от четырёх, то есть двум [*4].

Таня стукнула молотком. Гирька остановилась у числа два, и вспыхнула зелёная лампочка. Тогда и мне захотелось попробовать.

— Возвожу девять в половинную степень, — объявил я. — Рассуждаю так: девять в нулевой степени — это единица. Девять в первой степени — девять. Значит, девять в половинной степени равно четырём с половиной.

Я торжественно стукнул молотком, гирька остановилась на четырёх с половиной, и... вспыхнула красная лампочка. Я прямо обалдел. Несчастный я человек! Ну почему, почему мне так не везёт? Ведь я рассуждал точно так же, как Таня!

И снова на помощь мне пришла та же буковка (а я так и не запомнил — Эм она или Эн!).

— Дело в том, — сказала она, — что эта девочка допустила ошибку, а вы её повторили. Девять в половинной степени и вправду находится между единицей и девяткой. Но оно вовсе не равно половине от девяти. Для того чтобы возвести число в половинную степень, надо не делить его на два, а извлечь из него корень второй степени. А корень второй степени из девяти равен трём, а не четырём с половиной *5.

— Так почему же у Тани получилось правильно?

— Да потому, что корень второй степени из четырёх равен двум, а два и есть как раз половина от четырёх. И это — простое совпадение.

Таня, конечно, покраснела, а Олег (он всегда её выручает), чтобы отвлечь от неё внимание, сделал вывод:

— Значит, возвести число в степень, равную одной пятой, — это всё равно что извлечь из этого числа корень пятой степени.

Например:

$$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}.$$

— Ваша правда, — подтвердила буковка.

— Тогда, наверное, и обратно, — продолжал Олег. — Возвести число в пятую степень — это всё равно что извлечь из него корень степени одна пятая[*6]:

Что ты скажешь! Он и на этот раз попал в самую точку!

$$3^{\frac{1}{5}} = \sqrt[5]{3}.$$

Тут мне пришло в голову, что если можно возводить числа в положительные степени, то почему бы не попробовать в отрицательные? Буковка посмотрела на меня пристально:

— Уж очень вы торопитесь! Аль-Джебра — государство большое. Для того чтобы с ним как следует познакомиться, нужны не дни, не недели, а годы...

Ещё чего! А как же Чёрная Маска? Так и останется без лица?

Посовещались немного и решили, что довольно ходить вокруг да около. Пора приниматься за дело. Но прежде неплохо бы закусить! То-то мне стали вспоминаться гостеприимные обжоры...

Буковка словно угадала мои мысли:

— Может быть, вы проголодались? Тогда советую зайти в кафе «Абракадабра».

А нам только того и надо!

Хочешь знать, что дальше? Потерпи немножко. Всякому овощу...

Сева.

Комментарии

*1
$$2^3 = 8.$$

*2
$$2^{10} = 1\,024.$$

*3
$$2^0 = 5^0 = 100^0 = 200^0 = 1.$$

Для любого положительного числа a

$$a^0 = 1.$$

Причину этого мы узнаем в главе «Пекари-жонглёры».

*4
$$4^{\frac{1}{2}} = 2.$$

*5
$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt{4} = 2;$$

$$9^{\frac{1}{2}} = \sqrt{9} = 3.$$

Заметим, что

$$a^6 = a^{2\cdot 3} = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^2 \cdot a^2 \cdot a^2 = (a^2)^3;$$
$$a^6 = a^3 \cdot a^3 = (a^3)^2.$$

Аналогично для любых положительных целых чисел m и n:

$$a^{m \cdot n} = (a^m)^n = (a^n)^m.$$

Чтобы это равенство выполнялось и для дробных значений показателя степени, математики договорились считать:

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Потому что в этом случае:

$$a^1 = a^{n \cdot \frac{1}{n}} = \left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

*6 Для любых положительных чисел a и n

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}.$$

Нулик-Пограничник

(Нулик — отряду РВТ)

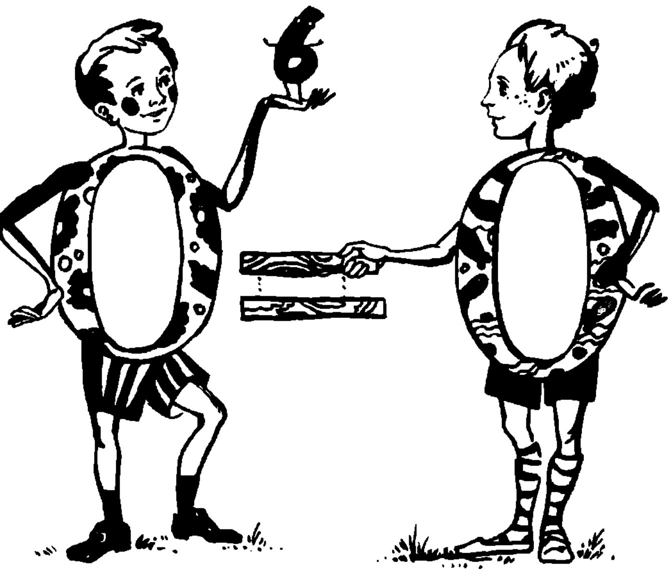
Пламенный привет от Нулика-Пограничника! Теперь наша школа называется пограничной. Мы не пропускаем ни одной цифры, пока не узнаем, какой у неё знак отличия: плюс или минус. Один Нулик даже не пустил домой собственную маму, потому что она рассердилась и не хотела отвечать на его вопросы. Кончилось тем, что мама его наказала, пожаловалась моей маме и нашу школу чуть не закрыли.

Хорошо ещё, что у меня такая добрая мама. Она меня простила и даже подарила силомер. Получше вашего-то: волшебный! Выбираешь число, задумываешь, в какую степень его возвести, бьёшь молотком, и гирька сама показывает ответ.

Я принёс силомер в школу, и все стали возводить нуль в разные степени. Но как мы ни старались, гирька ни разу не поднялась выше нуля. Словно её приклеили. Как вы думаете, отчего это? Может, у нас сил не хватает, чтобы ударить как следует? *[1]

Потом я надумал сделать то, чего вы не успели: возвести целое положительное число в отрицательную степень.

Но и от этого толку мало: какое число ни возьмёшь, гирька хоть и поднимается, но очень



немножко, не выше единицы. Тогда мы взяли большущее число 1000 и возвели его в минус третью степень: 1000^{-3}. Ухватились за молоток сообща и как трахнем! А противная гирька почти не сдвинулась с места. Что ж это такое? Неужели мама подарила мне испорченный силомер?

Я на неё очень обиделся, но она только рассмеялась. Она вообще любит смеяться. А потом сказала, что если возводить целое положительное число в целую отрицательную степень, то больше единицы никогда не получится. И чем большее число возводишь, тем меньшее число получается. Вот силомер и показал всего-навсего одну миллиардную: 0,000 000 001 [*2].

Пришлось поверить на́ слово. Потому что, отчего это происходит, мама не объяснила. Зато она сказала, что число, к о т о р о е возводится в степень, называется основанием степени, число, в к о т о р о е возводится это основание, — показателем степени, а уж сама степень получается только в ответе.

На этом основании я могу сказать, что не только вы меня, но и я вас могу кое-чему научить. Вот как!

Нулик-Пограничник.

Когда же вы напишете про кафе «Абракадабра»?

Комментарии

*1
$$0^2 = 0 \cdot 0 = 0;$$
$$0^3 = 0 \cdot 0 \cdot 0 = 0.$$

Точно так же для любого положительного целого числа n

$$0^n = 0.$$

*2 Почему так происходит, Нулик сможет узнать в главе «Пекари-жонглёры».

Карнавал

(Олег – Нулику)

Здравствуй, дружище! Ты просишь рассказать про кафе «Абракадабра», но так случилось, что мы опять туда не попали. Заколдованное оно, что ли? Мы уже были совсем близко, но тут дорогу нам преградило весёлое карнавальное шествие.

Впереди всех шли цифры. Многие держали на плечах маленьких Нуликов. Прямо как у нас на первомайской демонстрации.

Вслед за цифрами дружно выступали латинские и греческие буквы.

Чётким строевым шагом прошли знаки равенства, за ними – действующие знаки.

Легко подпрыгивали разноцветные точки, похожие на целлулоидовые мячики. Некоторые плавали в воздухе, как воздушные шары.

Вот промелькнули, кувыркаясь на ходу, ловкие гимнасты: знаки сложения и вычитания. Проковыляли на ходулях радикалы. Над ними – ни дать ни взять рой бабочек – порхали показатели корней.

А потом пошли скобки, скобки, скобки... Круглые, квадратные, фигурные...

Позади маршировал сводный оркестр восклицательных знаков.

— Слава доблестным факториалам! — закричали в толпе.

Мы хотели спросить, что за слово такое, но тут эти самые факториалы грянули марш. Разом ударились друг о друга десятки медных тарелок, загремели трубы. Защебетали, словно стая ласточек, флейты, и все кругом запели.

Так никто нам и не объяснил, что такое факториал и что вообще происходит.

— Может быть, это праздник Кирилла и Мефодия? — сказала Таня.

Её мама недавно была в Болгарии. Там каждый год устраивают торжества в честь создателей славянской письменности. В этот день жители надевают свои лучшие платья и выходят на улицу, чтобы посмотреть парад букв. В параде участвуют школьники. Каждый из них изображает какую-нибудь букву.

— При чём тут Кирилл и Мефодий? — фыркнул Сева. — Аль-Джебра — государство математическое. Не пойму только, как сюда попали буквы. Наверное, по недоразумению?

Он, как всегда, сказал это чересчур громко. Вот когда нас наконец услышали!

— Как это — по недоразумению? — возмутились толпившиеся кругом буквы. — Это мы-то по недоразумению? Нас оскорбляют! Нас унижают!

— Да знаете ли вы, — кипятилась латинская буква Тэ, — знаете ли вы, что без нас, может, и не было бы никакой Аль-Джебры!

— Может, и не было бы! — подтвердили хором другие буквы.

Мне с трудом удалось объяснить им, что Сева не хотел никого обидеть. Просто мы здесь впервые и многого ещё не знаем. Буквы сменили гнев на милость и стали наперебой что-то нам объяснять. Но они так волновались и галдели, что ничего нельзя было разобрать.

— Граждане буквы, — сказал я, — говорите по очереди! Так мы легче поймём друг друга.

Тогда из толпы вышел важный Дэ.

— Пусть каждый из вас, — сказал он, — задумает какое-нибудь число. Задумали? Хорошо. Теперь умножьте его на три. Так. Прибавьте четыре. Готово? Теперь пусть каждый скажет, какое число у него получилось.

— Десять! — объявила Таня.

— Нет, девятнадцать! — возразил Сева.

— А у меня шестьдесят четыре, — сказал я.

— Видите, вас трое, и у каждого получилось по-разному. Но в этой игре могут быть тысячи, миллионы участников. Каждый может задумать любое число, и мы получим целую гору ответов. Для того только, чтобы прочитать их — не то что записать, — понадобится уйма времени. А я вот записал на этом клочке бумаги все возможные ответы.

И Дэ показал нам свою запись:

$$3a + 4.$$

— Позвольте, где же девятнадцать? — всполошился Сева.

— Да здесь же. Вы, как я догадываюсь, задумали число пять. Трижды пять — пятнадцать. Прибавим четыре — получится девятнадцать[*1].

— Но где же тут пять?

— Да вот оно: буква a.

— Значит, a — это пять?

— Для вас, — улыбнулся Дэ. — Для другого оно — три. И тогда ответ будет тринадцать. Для третьего — сто. В этом случае ответ — триста четыре[*2]. Буква a может быть по вашему желанию заменена любым числом.

— Вот не знал, что она такая особенная! — почтительно сказал Сева.

— Ничего особенного в ней нет. Вместо a вы можете поставить любую другую букву. Ответ нисколько не изменится:

$$3c + 4.$$

— Дайте нам ещё одну задачу! — попросила Таня. — А мы запишем её буквами.

— Пожалуйста. Задумайте два числа. Первое умножьте на два, второе — на пять и сложите эти произведения.

— Очень просто, $2a + 5a$, — сказал Сева.

Дэ удивлённо поднял брови:

— Вы что, задумали два одинаковых числа?

— Нет, разные.

— Тогда почему же они обозначены одинаковыми буквами? У нас, слава богу, и других достаточно. Уж если вы задумали разные числа, так и обозначайте их разными буквами:

$$2a + 5b.$$

— Почему это, — спросила Таня, — вы говорите, что умножаете два на a, пять на b, а знаков умножения не ставите? Может, вы экономите крестики? Поставили бы хоть точку.

— Мы и вправду экономим, но не крестики, а время. И не только время, но и место. Разве $2a$

не то же самое, что a, умноженное на два, иначе говоря: a, взятое два раза? [*3] Для чего же тратить место на знак умножения? Однако что же это мы здесь стоим! — спохватился Дэ. — На стадионе, наверное, уже начался физкультурный парад. Вот где вам покажут разные действия, которые у нас называются алгебраическими.

И мы заторопились на стадион. А теперь, как в театре, антракт.

Олег.

Примечание: скажи тому Нулику, который не пускал домой маму, — пусть зарубит на носу, что положительными и отрицательными бывают только числа, а не цифры. А так как у вас, в Карликании, все мамы — цифры, то дома никаких знаков отличия у них нет. Эти знаки появляются только на работе, когда мамы-цифры становятся числами. Вот как!

Комментарии

*1

$$a = 5;$$
$$3a + 4 = 3 \cdot 5 + 4 = 19.$$

*2
$$a = 100;$$
$$3a + 4 = 3 \cdot 100 + 4 = 304.$$

*3
$$2 \cdot a = 2a.$$

Круг почёта

(Таня – Нулику)

Дорогой Нулик! Праздник был просто замечательный!

Мы пришли как раз вовремя. Переполненный стадион гудел, как пчелиный улей. Но вот на главной трибуне в убранной цветами ложе появился величественный А. Он подошёл к микрофону, поднял руку, и улей сейчас же затих.

— Дорогие сограждане! Дорогие друзья! — начал А. — Приветствую вас в день ежегодного праздника Аль-Джебры. Сегодня мы чествуем всех, кто в разные века и в разных странах трудился во славу нашего великого государства.

Все вы знаете, что государство это очень древнее. Но многие учёные, создававшие его, жили задолго до его рождения. Они работали не так, как мы сейчас — сообща, в тесном содружестве, а врозь, разделённые временем и пространством.

Они начинали эту науку, а начинать всегда труднее. Тем выше их заслуги перед людьми, а значит, и перед нашим государством.

Государство это не всегда было таким, как сейчас. Да оно и не сразу стало государством. Но необходимость в нём появилась давным-давно, ещё у древних народов: вавилонян, китайцев, индийцев, а потом и у греков.

Это были народы большой культуры. Развитие земледелия, торговли, мореходства требовало решения трудных арифметических задач. Но вот беда! Рассуждения древних математиков были так длинны и запутанны, что простые люди не могли в них разобраться.

Тогда учёные стали думать, как бы упростить решения задач. И не только упростить, но и обобщить, то есть найти для многих однородных задач одно общее решение. Достаточно подставить в него нужные числа — и ответ готов.

Учёные трудились не напрасно: решать задачи становилось всё легче. Зато сами задачи становились всё труднее. Потому что жизнь шла вперёд. Некоторые задачи ставили даже математиков в тупик: их нельзя было решить ни одним известным способом. И тут на помощь пришли особые, до тех пор незнакомые числа: отрицательные, иррациональные, мнимые и другие.

Числа эти входили в обиход долго, с трудом. Многие математики их поначалу не признавали. Отрицательные числа они называли ненужными, а мнимые — ложными. Но со временем польза этих чисел стала очевидной для всех. Теперь она ясна каждому школьнику, побывавшему на воздушной монорельсовой дороге. Попробовал бы он обойтись без отрицательных чисел при вычитании из меньшего числа большего!

Но особую роль в расцвете Аль-Джебры сыграли буквы. Они сразу навели порядок в беспорядочном ворохе самых различных задач.

Буквенные обозначения появились очень давно. Их ввёл в арифметику двадцать четыре столетия назад величайший мыслитель древности Аристотель. Однако широкое применение буквы нашли не сразу.

Сейчас научные новости распространяются быстро. Ещё бы! Ведь у нас есть и печать, и радио, и телевидение! *[1] Но в далёкие времена ничего этого не было. И понадобилось двадцать веков, чтобы люди по достоинству оценили изобретение Аристотеля.

Это было начало новой эпохи в геометрии, физике, астрономии, химии и других науках. А уж о математике и говорить нечего! Вряд ли сам Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми мог мечтать о таком расцвете своего детища.

Не хочу этим сказать, что нашим учёным больше уже нечего делать. Ничего подобного! У науки нет предела. Развитие её бесконечно. А что такое Бесконечность, объяснять не нужно. Все вы это отлично знаете. Поэтому мы с особенным удовольствием приветствуем сегодня всех, кто изучает историю и законы нашего государства. Мы возлагаем на них особые надежды: ведь им предстоит решить многие нерешённые задачи!

Вдруг оратор повернулся в нашу сторону и низко нам поклонился. И все сидящие на трибунах встали и громко зааплодировали.

Мы просто не знали, куда деваться, и очень обрадовались, когда зрители снова уселись на свои места.

Но тут А скомандовал: «Поднять флаги!» — и все встали опять. Заиграла музыка, и в воздух взвились десятки разноцветных полотнищ. Здесь были флаги многих стран. Некоторые мы видели впервые, но наш узнали сразу!

Потом начался парад. На огромном зелёном поле появился движущийся помост. На помосте толпились костюмированные буквы и цифры. Кого только они не изображали! Были здесь и важные бородатые восточные мудрецы, и древние греки в белоснежных одеждах. В маленьких пагодах сидели китайцы в чёрных шапочках и пёстрых халатах. Ах, Нулик! Это была целая костюмерная! У меня до сих пор в глазах рябит от фесок, тюбетеек, шаровар, пудреных париков, камзолов, фраков, сюртуков...

Мы спросили у Дэ, что означает этот маскарад.

— Как?! Неужели вы не поняли? Перед вами учёные, которым посвящён сегодняшний праздник. Они совершают круг почёта. Впереди в белой чалме Мухаммед аль-Хорезми, рядом — Аристотель [*2].

— А это кто? — Сева указал на длиннокудрую маску в плаще и широкополой шляпе с перьями.

— Знаменитый французский математик Вие́т [*3]. Ему мы обязаны тем, что буквы в шестнадцатом веке получили наконец всеобщее признание. Справа от него стоит другой великий француз — математик и философ Рене́ Дека́рт. Он жил несколько позже, в семнадцатом веке, и тоже многое сделал для Аль-Джебры [*4].

— А вот и ещё один древний грек! — обрадовалась я.

— Вы, наверное, говорите о Диофа́нте? — догадался Дэ. — О, это замечательный человек! Ещё в третьем веке нашей эры он решал сложнейшие алгебраические задачи. Диофант изложил их в своей знаменитой книге «Арифметика». Правильнее было бы назвать её «Алгебра», но тогда этого слова ещё не знали [*5].

— На полях «Арифметики» Диофанта записал свою теорему Ферма́, — сказал Олег [*6].

Дэ посмотрел на него недоверчиво:

— Вы знакомы с Ферма? С великим французским математиком?

— Мы встречались с ним на Дороге Светлого Разума, когда возвращались из Карликании. Да вот он, рядом с Диофантом!

— Ребята, ребята, смотрите, Лобачевский! [*7] — тормошил нас Сева.

— Как, вы и Николая Ивановича знаете? — ещё больше изумился Дэ.

— Конечно! — важно ответил Сева. — Он нам и письмо прислал: «Кажется, нельзя сомневаться в истине того, что всё в мире может быть представлено числами...»

— И буквами, — добавил Дэ. — Уверен, Лобачевский не сказал так лишь потому, что это само собой разумеется.

Платформа с учёными сделала три круга и покинула поле под гром приветствий.

И тогда началось самое интересное.

Но об этом тебе расскажет Сева.

Так что жди письма.

Таня.

Не думай, что я такая умная и запомнила всё, что говорил А.

Речь его была тут же отпечатана и размножена. Мне оставалось только переписать. Листок же я сохранила на память.

Комментарии

*[1] Владимир Лёвшин и Эмилия Александрова написали «Чёрную Маску из Аль-Джебры» в 1964 году. Сегодня, спустя почти полвека после первой публикации книги, ко всему перечисленному мы можем добавить ещё и Интернет.

*[2] *Аристо́тель* — великий древнегреческий философ и учёный, живший в IV веке до нашей эры (384–322 гг.). Многочисленные сочинения Аристотеля охватывают почти всю область доступного тогда знания, которое в его трудах получило более глубокое философское обоснование и было приведено в строгий, систематический порядок. Под руководством Аристотеля получил классическое греческое образование Александр Македонский.

*[3] *Франсуа Виет* (1540–1603) — французский математик, один из основателей современной алгебры, был первым математиком, систематически использовавшим буквенные обозначения вместо неизвестных величин. По образованию и основной профессии — юрист. На этом поприще Виет сделал блестящую карьеру, став советником короля Генриха III, а после его смерти — Генриха IV. Франсуа Виет прославился также расшифровкой переписки испанских агентов во Франции, за что был даже обви-

нён королём Испании Филиппом II в использовании чёрной магии.

*[4] *Рене Декарт* (1596–1650) — французский математик, философ и физик. В математике главное достижение Декарта — создание аналитической геометрии. Главный математический труд Декарта «Рассуждение о методе» вышел в 1637 году. После появления «Рассуждения о методе» стало возможным изучать геометрические свойства кривых линий и тел, исследуя свойства алгебраических уравнений, описывающих эти линии (или тела) в системе координат, названной Декартовой системой координат.

*[5] *Диофант Александрийский* — древнегреческий математик, живший предположительно в III веке нашей эры. О его жизни практически ничего не известно. Основное произведение Диофанта — «Арифметика» в 13 книгах. К сожалению, сохранились только 6 первых книг из 13. Основное содержание «Арифметики» — нахождение решений неопределённых уравнений (называемых сейчас также диофантовыми). В X веке «Арифметика» была переведена на арабский язык, благодаря чему математики исламских стран продолжили некоторые исследования Диофанта. Европейские математики впервые познакомились с «Арифметикой» благодаря переводам Рафаэля Бомбелли (1572) и Клода Гаспáра Баше де Мезириака (1621).

Методы Диофанта оказали огромное влияние на Франсуа Виета и Пьера Ферма.

*6 *Пьер Ферма* (1601–1665) — французский математик, один из создателей аналитической геометрии, математического анализа, теории вероятностей и теории чисел. По профессии юрист, с 1631 года — советник парламента в Тулузе. Ферма считался одним из лучших математиков Франции, хотя и не писал книг, ограничиваясь лишь письмами к коллегам. Среди его корреспондентов были Рене Декарт, Жерар Дезарг, Жиль Роберваль и другие. Открытия Ферма дошли до нас благодаря сборнику его обширной переписки, изданной посмертно его сыном.

Пьер Ферма широко известен формулировкой Великой теоремы Ферма:

для любого натурального числа $n > 2$ уравнение

$$x^n + y^n = z^n$$

не имеет натуральных решений x, y, z.

Теорема была сформулирована им в 1637 году на полях «Арифметики» Диофанта с припиской, что найденное им остроумное доказательство этой теоремы слишком длинно, чтобы привести его на полях. Вероятнее всего, его доказательство не было верным, так как позднее он опубликовал доказательство только для случая $n = 4$. Доказательство, найденное в 1994 году Эндрю Уайлсом, содержит 129 страниц и опубликовано в журнале «Annals of Mathematics» в 1995 году.

*[7] *Николай Иванович Лобачевский* (1792–1856) — русский математик, создатель неевклидовой геометрии. К сожалению, научные идеи Лобачевского не были поняты современниками. Его труд «О началах геометрии», представленный в 1832 году Советом Казанского университета в Академию наук, получил отрицательную оценку Михаила Остроградского. Почти никто из коллег Лобачевского не поддержал. Ученый попытался найти единомышленников за рубежом. В 1837 году статья Лобачевского «Воображаемая геометрия» появилась в авторитетном берлинском журнале «Крелле», а в 1840 году Лобачевский опубликовал на немецком языке небольшую книгу «Геометрические исследования по теории параллельных», где содержалось чёткое и систематическое изложение его основных идей. Два экземпляра получил Карл Фридрих Гаусс, «король математиков» того времени. Как выяснилось много позже, Гаусс и сам тайком развивал неевклидову геометрию, однако так и не решился опубликовать что-либо на эту тему. Гаусс выразил свою симпатию к идеям русского учёного косвенно: он рекомендовал избрать Лобачевского иностранным членом-корреспондентом Гёттингенского королевского научного общества как «одного

из превосходнейших математиков Русского государства». Избрание Лобачевского состоялось в 1842 году и стало единственным прижизненным признанием его научных заслуг. Учёный умер непризнанным, так и не дожив до торжества своих идей. Осознание того, что у евклидовой геометрии имеется полноценная альтернатива, произвело огромное впечатление на научный мир и придало импульс другим новаторским идеям в математике и физике.

Необходимо упомянуть также, что Николай Лобачевский в течение 40 лет преподавал в Казанском университете, в том числе 19 лет был его ректором. Под руководством Лобачевского Казанский университет стал одним из лучших российских учебных заведений.

Разноцветные береты

(Нулик — отряду РВТ)

Дорогие ребята! Как мне досадно, как мне обидно, что я не смог побывать на стадионе и увидеть карнавал!

Но зато я сделал важное открытие. То есть открытие сделала мама. И вообще это не открытие, а давно известная вещь. Но для меня она была открытием.

Дело было так.

Мои ученики тоже решили устроить карнавал. И семь Нуликов явились в школу в новеньких беретах, все береты разных цветов: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий и фиолетовый. Словом, семь цветов радуги. Нулики в беретах должны были идти во главе карнавального шествия. Но мне не понравилось, в каком порядке они стоят. Мне показалось, что красный берет должен быть рядом с синим, а синий — с оранжевым. А другому Нулику захотелось, чтобы жёлтый был рядом с фиолетовым. Тут каждый стал вносить свои предложения:

— Жёлтый с красным!

— Красный с синим!

— Фиолетовый с жёлтым!

Все так расшумелись, что я долго не мог их успокоить. Порешили перепробовать все перестановки. А потом большинством голосов выбрать самую красивую.

И началось! Расставили Нуликов так, как они стояли вначале: красный, оранжевый, жёлтый, зелёный, голубой, синий, фиолетовый.

Потом Нулики стали меняться местами. Красный оказался на месте оранжевого, потом перешёл на место жёлтого, потом на место зелёного и так до тех пор, пока он не очутился на месте фиолетового. Теперь впереди оказался Нулик в оранжевом берете. Мы стали его тоже постепенно передвигать вправо. Так же поступили и с зелёным, и со всеми остальными. А когда красный берет опять оказался первым слева, мы решили его оставить на месте и стали двигать вправо другие береты: жёлтый, зелёный, синий... Переставляем, переставляем... Второй день переставляем. О карнавале никто уж не заикается. Сделали 527 перестановок, а до конца — далеко.

Мы было хотели бросить, но тут появилась моя мама. Пришлось рассказать, в чём дело. А она давай смеяться! А когда отсмеялась, спросила:

— Неужели вы не знаете, что такое факториал?

— Знаю! — выпалил я, вспомнив ваше письмо. — Это оркестр восклицательных знаков.

Мама стала смеяться снова. А потом сказала, что факториалы могут, конечно, играть в оркестре. Но это не мешает им оставаться математическим знаком. Его ставят после какого-нибудь числа. И тогда он показывает, сколько чисел натурального ряда надо перемножить. Вот, например: если написать 3! — значит, надо перемножить все числа натурального ряда от единицы до трёх включительно:

$$3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6.$$

А записывается это так, чтобы было покороче. Задумали перемножить числа от единицы до миллиона — пожалуйста: пишем 1 000 000!. Коротко и ясно.

А ещё мама сказала, что слово «факториал» произошло от латинского слова «фактор». Понашему это «производящий действие». Вот факториал и производит перемножение чисел натурального ряда.

Ну, это я запомнил сразу. Одного только никак не мог понять: при чём здесь разноцветные береты?

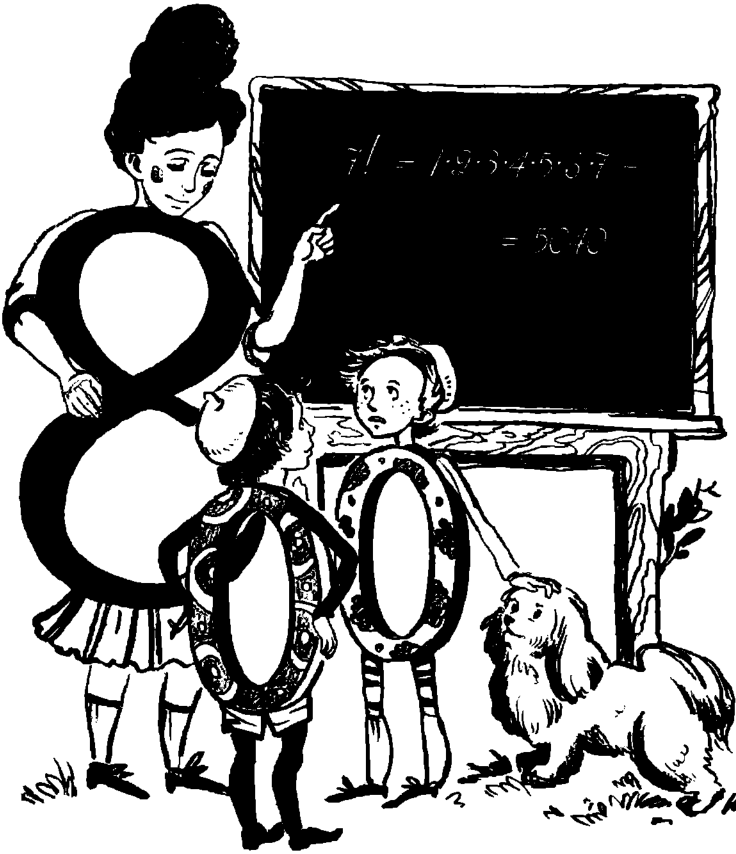
— А вот при чём, — сказала мама. — Если вы хотите узнать, сколько раз надо переставить семь Нуликов в разноцветных беретах, чтобы сделать все возможные перестановки, надо вычислить факториал числа семь, то есть перемножить все числа натурального ряда от единицы до семи.

Стали перемножать и получили большущее число:

$$7! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 5\,040.$$

Пять тысяч сорок! Пять тысяч сорок перестановок! А мы сделали всего 527. Ужас!..

Хорошо, что в разноцветных беретах явились всего семь Нуликов. А что если бы двадцать семь? Пришлось бы вычислять факториал


7! = 1·2·3·4·5·6·7 =
= 5040

двадцати семи. Нет уж, дудки! Хотите — считайте сами. А я не буду*1.

Всего вам хорошего. С нетерпением жду новых сообщений.

Нулик-Факториал.

Комментарии

*1 Представим, что в магазине есть три вида джинсов и четыре вида футболок. Тогда комплект из футболки и джинсов можно купить $3 \cdot 4 = 12$ способами, потому что при каждом из трёх выборов джинсов у нас есть четыре варианта для выбора футболки. Этот пример иллюстрирует так называемый принцип произведения: если объект A можно выбрать n способами, а объект B после выбора объекта A можно выбрать m способами, то вместе объекты A и B можно выбрать $n \cdot m$ способами.

Если нам надо расставить семь Нуликов в разноцветных беретах, то у нас есть семь мест. На первое место мы можем выбрать Нулика семью способами. После этого выбора у нас останется шесть Нуликов. Поэтому на второе место мы можем выбрать Нулика шестью способами, после чего у нас останется пять Нуликов. Поэтому на третье место мы можем выбрать Нулика пятью способами. И так далее...

Место	Количество вариантов выбора Нулика
1-е	7
2-е	6
3-е	5
4-е	4
5-е	3
6-е	2
7-е	1

Поэтому по принципу произведения количество способов расстановки семи Нуликов в разноцветных беретах будет равно:

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 = 7!.$$

Репортаж со стадиона

(Сева — Нулику)

Внимание, внимание! Говорят все радиостанции Аль-Джебры! Начинаем репортаж с Центрального стадиона. Здесь сейчас будут выступать самые юные гимнасты страны. Слышите гул приветствий? Это на поле выбегают дошкольники — латинские буковки *a* в зелёных костюмах, за ними буковки b — они в красном, и наконец c — в светло-жёлтом. Они образуют несколько рядов и замирают. Теперь каждая из них не просто буква. Здесь она называется одночлен.

Сверху нам открывается чудесное зрелище: пёстрый прямоугольник из букв. Но вот грянул оркестр факториалов. Звучит вальс, и прямоугольник приходит в движение. Буквы делают шаг в сторону. Одни вправо, другие влево. Потом они берутся за руки, и вот уже перед нами десятки разноцветных пар:

$$ab,\ ac,\ bc.$$

Зелёное с красным, жёлтое с зелёным, красное с жёлтым...

Юные гимнасты показывают действие, которое называется перемножением одночленов[*1]. Разумеется, никаких знаков умножения при этом нет. Каждый младенец в Аль-Джебре знает, что если две буквы стали рядом, значит, они помножены друг на друга.

Не подумайте только, что от перемножения буквы превратились в двучлены. Боже упаси! Это грубая ошибка! Они как были, так и остались одночленами.

Но вот идёт новая перестановка. Теперь буковки объединяются по три:

$$abc,\ acb,\ bac,\ bca,\ cab,\ cba.$$

Легко догадаться, что это тоже произведения и каждое из них опять-таки одночлен.

Умножение одночленов закончилось. Буквы снова заняли первоначальные позиции. Оркестр играет весёлую полечку. На стадионе появляются знаки сложения и вычитания. Плюсы и минусы занимают места между буковками-одночленами:

$$a + b,\ b + c,\ a - b,\ b - c.$$

Вот когда буквы из одночленов превратились в двучлены. Но не успели зрители как следует полюбоваться этой картиной, как буквы образуют уже другие суммы:

$$a + b - c,\ a + c - b,\ a - b - c...$$

Теперь это уже трёхчлены. Жаль, что в упражнениях принимают участие только a, b и c. Будь здесь другие буквы, мы увидели бы ещё более сложные алгебраические суммы.

Внимание! Начинается новое упражнение. Забавно! Очень забавно! Знаки плюс стали между одинаковыми буквами. Сейчас сложились семь буковок a, и... о чудо! Вместо семи осталась только одна. Остальные шесть исчезли на наших глазах, а вместо них на поле появилось число Семь. Оно стало слева от буквы a, и весь стадион хором прочитал: «Семь a».

Это волшебное алгебраическое упражнение называется приведением подобных. Оно возможно только тогда, когда все слагаемые действительно подобны, то есть совершенно одинаковы. Какая экономия места, времени и чернил! В Аль-Джебре очень любят экономию. В самом деле, к чему писать:

$$a + a + a + a + a + a + a,$$

если можно записать коротко и ясно:

$$7a.$$

Семёрка немного важничает. Оно и понятно: ведь она одна заменила шесть одинаковых букв и ей присвоено почётное звание числового коэффициента при букве a.

Ага! Другим буквам это тоже понравилось. Они просят плюсы занять места между ними. И вот число букв стремительно уменьшается. Вместо них на поле появляются числа-коэффициенты. Вместе с оставшимися буквами они образуют одночлены:

$12b$, $8a$, $24abc$, $3bc$ и так далее.

Их зорко охраняют рыцари-коэффициенты.

Упражнениям нет конца! Только что на поле образовался многочлен

$$abc + abc + abc + abc + abc + abc,$$

как мигом произошло приведение подобных и появился верный рыцарь — коэффициент Шесть:

$$6abc.$$

Но что это? Оркестр замолкает... Понимаю: сейчас произойдёт перегруппировка и начнётся новое упражнение. В самом деле: минусы и плюсы покидают поле под дружные аплодисменты. Буковки снова образовали пёстрый прямоугольник. Но теперь в первом ряду стоят буквы в зелёном, во втором — в красном, в третьем — в светло-жёлтом. Они повторяют самое первое упражнение — перемножение одночленов. Только теперь все сомножители одинаковые. И опять происходят чудеса. Как только две одинаковые буквы перемножатся, одна из них сейчас же исчезает, а на поле появляется число Два. Буква протягивает руку, и Двойка ловко вскакивает к ней на ладошку:

$$a^2.$$

Вы думаете, число Два называется коэффициентом? Ничего подобного! Это показатель степени. Вы уже с ним знакомы. Ведь упражнение, которое сейчас проделывают буквы, — это возведение в степень!

Вот перемножились три b, и получилось Бэ в кубе:

$$b^3.$$

Десять с, перемножившись, образовали одночлен — Цэ в десятой степени:

$$c^{10}.$$

Одна комбинация сменяется другой. Перед нами возникают:

$$a^{25},\ b^{40},\ c^{16},\ a^6.$$

И вот появляется Цэ в степени эн:

$$c^n.$$

Это уже что-то новое. Правда, только на первый взгляд. Мы ведь уже знаем, что буквами обозначаются числа. Цэ в энной степени означает Цэ, возведённое в любую степень. Подставьте вместо эн любое число — и ответ готов.

Музыканты после небольшой паузы снова заиграли вальс. Начались самые пластичные, самые замысловатые гимнастические упражнения: умножение многочленов на одночлен.

Вот уже образовались двучлены:

$$a + b, a + c,$$

потом трёхчлены:

$$a + b + c$$

и много других. Сейчас они начнут умножаться на одночлены... Но в чём дело? Произошла какая-то заминка. Музыка смолкла. Ага! Теперь всё ясно: оказывается, многочлены не могут ни на что умножаться, если их предварительно не заключить в скобки. Иначе может выйти ужасная путаница: никто не узнает, где тут одночлен, а где многочлен.

На поле появляются круглые скобки. Они становятся по бокам каждого многочлена. Ну вот, всё в порядке, можно продолжать.

Начинается представление под названием «Хитрый обманщик».

На поле появляется выражение:

$$(a + b)c.$$

Цэ стучится в скобку, как в дверь.

Ц э. Хозяева дома?

А + Б э *(вместе).* Да! А кто это?

Ц э. Это я, Цэ.

А + Б э. А с вами никого нет?

Ц э *(невинным голосом).* Никого.

А + Б э. Тогда входите.

Скобки открываются, Цэ входит и... раздваивается. Одно Цэ подходит к А, другое — к Бэ. И вот мы уже видим новую сумму:

$$ac + bc.$$

Все негодуют. Свист, крики:

— Гоните обманщика!

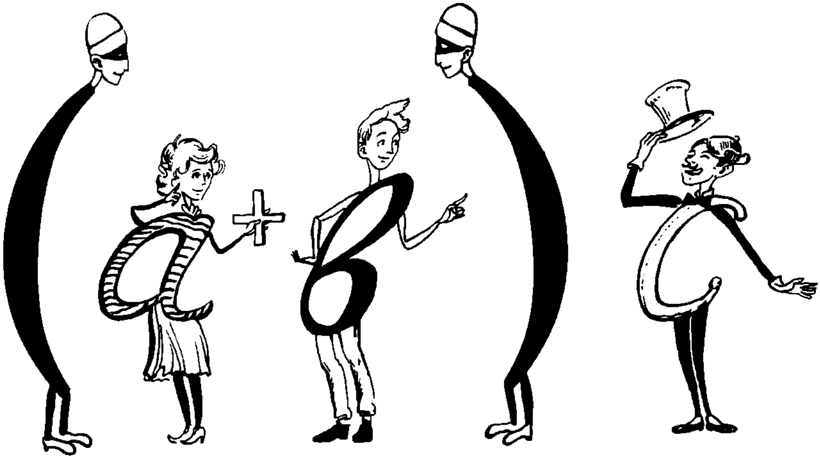
А + Б э (вместе). На помощь! Спасите!!

Вбегают дружинники и выносят отчаянно сопротивляющихся Цэ за скобки. Здесь обе буквы снова превращаются в одно Цэ.

Обманщик наказан. Справедливость торжествует. На поле снова красуется прежнее выражение:

$$(a + b)c.$$

Пьеса имеет шумный успех. Артистов вызывают много раз, точнее, эн раз — n раз.



Сказав так, я никого не обману, и дружинникам не придётся выносить меня за скобки [*2].

Дорогие радиослушатели! Как видно, эти упражнения никогда не кончатся, а я уже устал. Очень прошу вас, возьмите карандаши и бумагу и придумайте сами пример на перемножение многочленов.

До свидания.

Репортаж с Центрального стадиона Аль-Джебры вёл

Сева.

Комментарии

[*1] *Одночлен* — это произведение, состоящее из числового множителя и одной или несколько букв, взятых каждая с тем или иным целым положительным показателем степени. Например, одночленами являются:

$$3a;\ -2ab;\ abc;\ \sqrt{2}cd;\ a^2;\ b^3;\ c^5.$$

Произведение одночленов — тоже одночлен:

$$-2cd \cdot 7bc = -14 \cdot b \cdot c \cdot c \cdot d = -14bc^2d.$$

*2 Равенство

$$(a + b)c = ac + bc$$

называется в Аль-Джебре сочетательным (или дистрибутивным) законом.

Пекари-жонглёры

(Снова Сева — Нулику)

Ну как, Нулик, здо́рово у меня вышло? Конечно, у того комментатора, который вёл передачу со стадиона, получалось лучше. А по мне сойдёт и так.

А сейчас я тебе своими словами расскажу, что было дальше.

По радио объявили: «Следующий номер нашей программы — Весёлые Пекари! Высший класс жонглирования! Перемножение и деление степеней!»

На зелёное поле выбежали три буквы Цэ. Все они были в белых поварских колпаках, у каждой палка, а на палке кольца — похоже на детские пирамидки. Только там кольца разноцветные, одно другого меньше, а здесь одинаковые, золотистые, как толстенькие поджаристые бублики.

Это и впрямь были бублики, да ещё с маком! У одного пекаря — два бублика, у другого — три. У третьего колец на палке не было.

Заиграла музыка.

Первый пекарь снял с палки верхнее кольцо и ловко метнул. Кольцо очертило в воздухе плавную дугу и угодило на пустую палку третьего пекаря. Вслед за первым кольцом туда же полетело второе. То же самое сделал другой пекарь, и вот уже у третьего пекаря на палке все пять колец, а первые два пекаря остались ни с чем.

Потом жонглёры перестроились.

Теперь у одного на палке было три кольца, у другого — шесть, у третьего опять ничего. Снова заиграла музыка, замелькали кольца. И опять у третьего пекаря на палке — девять бубликов, а у других — ничего.

— Чистая работа, — сказал Дэ, — ни одно колечко не упало.

— Работа-то чистая, но при чём здесь умножение степеней? — спросил я. — Не понимаю.

— А я понимаю, — похвасталась Таня. — При перемножении степеней показатели надо складывать:

$$c^3 \cdot c^6 = c^{3+6} = c^9.$$

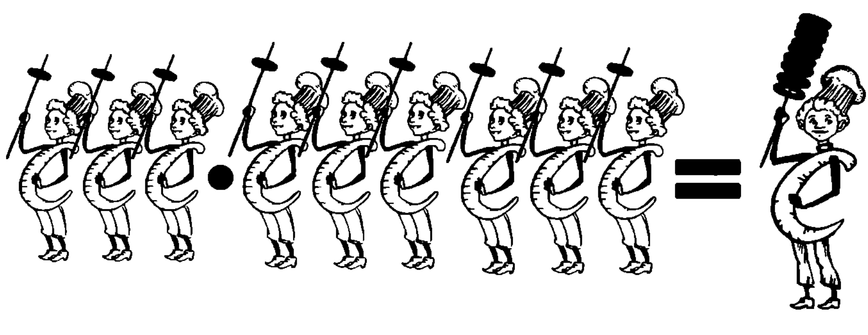
— Совершенно правильно, — подтвердил Дэ. — Число колец на палке обозначает показатель степени.

— Пусть, — сказал я, — а мне всё равно непонятно.

— Поглядите на поле, — предложил Дэ, — тогда уж обязательно поймёте.

Я поглядел и увидел, что два Цэ (у одного на палке три кольца, у другого — шесть) стали рядом и между ними появился знак умножения — точка. И тут на поле выбежали ещё девять Цэ. У этих на палках было только по одному кольцу. Трое из них встали на место Цэ с тремя кольцами, а шестеро заменили Цэ с шестью кольцами. Тогда пекарь с пустой палкой отделился от них знаком равенства и стал следом за ними. А первые два пекаря отдали ему свои кольца, и получилось вот что:

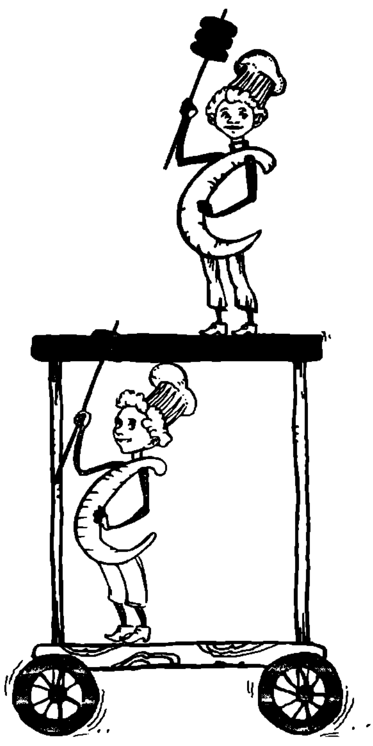
$$c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c \cdot c = c^9.$$



На этот раз и вправду всё было понятно: Цэ в третьей степени, умноженное на Цэ в шестой, — это всё равно что Цэ, умноженное само на себя девять раз, или попросту Цэ в девятой степени*1.

Потом началось деление степеней. На поле выкатили двухэтажную тележку. На верхнюю площадку вскочил жонглёр с тремя кольцами на палке — числитель, на нижнюю — жонглёр с двумя кольцами — знаменатель:

$$\frac{c^3}{c^2}.$$



Снова заиграла музыка, и, можешь себе представить, пекари стали снимать с палок кольца и с аппетитом их есть. Оказалось, это и впрямь самые настоящие бублики. И очень вкусные. С маком. Нас потом угостили.

Так вот, Цэ стали лопать свои бублики: числитель съест один, и знаменатель — один, числитель — один, и знаменатель — один... Когда Цэ-знаменатель съел все свои бублики, он исчез. На площадке осталась только его палка.

А Цэ-числитель — у него на палке ещё болтался один бублик — продолжал стоять наверху как ни в чём не бывало*2.

— Ясно, — сказал Олег. — Деление — действие, обратное умножению. Значит, показатели степеней надо при этом не складывать, а вычитать.

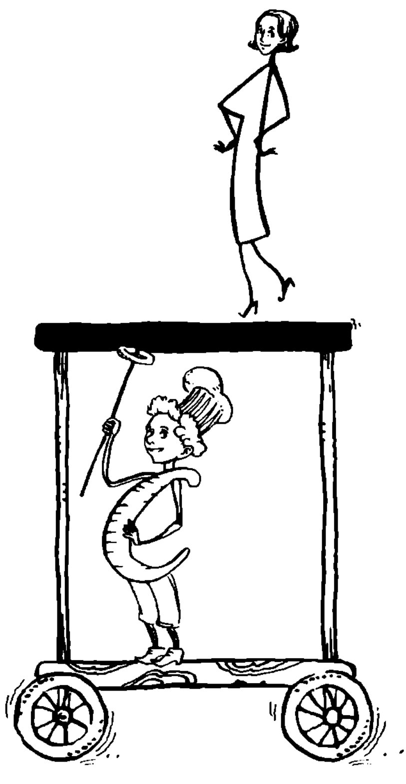
— Верно! — поддержала Таня. — Из трёх бубликов отняли два. В знаменателе очутилась палка-единица. А в числителе — Цэ с одним бубликом, то есть Цэ в первой степени.

— Первая степень не пишется, — вспомнил я. — Стало быть, просто Цэ:

$$\frac{c^3}{c^2} = c^{3-2} = c^1 = c.$$

— Вот вам и частное от деления двух степеней, — пояснил Дэ. — Посмотрим теперь, что будет, если Цэ в квадрате разделить на Цэ в кубе.

Теперь на верхней площадке стоял Цэ-числитель с двумя бубликами, а на нижней — Цэ-знаменатель с тремя. Опять они принялись уплетать, но теперь уже без бубликов оказался Цэ-числитель. Он исчез, оставив на площадке свою палку. А Цэ-знаменатель, у которого оставался один бублик, продолжал стоять на площадке.



— Видите, — сказал Дэ, — частное от деления равно единице, делённой на Цэ, или одной цэтой, как у нас говорят *3.

— Позвольте, — вмешался Олег, — при делении степеней показатели вычитаются. Значит, это можно изобразить так:

$$\frac{c^2}{c^3} = c^{2-3} = c^{-1}.$$

— Ой! — испугалась Таня. — У тебя получилась отрицательная степень!

— Вполне законно, — возразил Дэ. — Одна цэтая — это то же самое, что Цэ в минус первой степени.

Вон оно что! Выходит, если целое число возвести в отрицательную степень, оно превращается в дробь:

$$c^{-1} = \left(\frac{1}{c}\right)^1 = \frac{1}{c};$$

$$c^{-2} = \left(\frac{1}{c}\right)^2 = \frac{1}{c^2};$$

$$c^{-3} = \left(\frac{1}{c}\right)^3 = \frac{1}{c^3}$$

и так далее *4.

Слышишь, Нулик? Ты, помнится, хотел знать, отчего гирька твоего силомера не желала подниматься выше единицы? Вот тебе и ответ. Возвести пять в минус вторую степень — всё равно что возвести одну пятую в плюс вторую степень:

$$5^{-2} = \left(\frac{1}{5}\right)^2 = \frac{1}{25}.$$

Иначе и быть не может. Ведь у отрицательных чисел всё наоборот! И чем большее число возводишь в отрицательную степень, тем меньше получается дробь. Потому-то тысяча, возведённая в минус третью степень, оказалась равной одной миллиардной:

$$\left(1\,000\right)^{-3} = \left(\frac{1}{1\,000}\right)^3 = \frac{1}{1\,000\,000\,000} = 0{,}000\,000\,001.$$

А теперь слушай дальше. В числителе и знаменателе очутились Цэ с тремя бубликами.

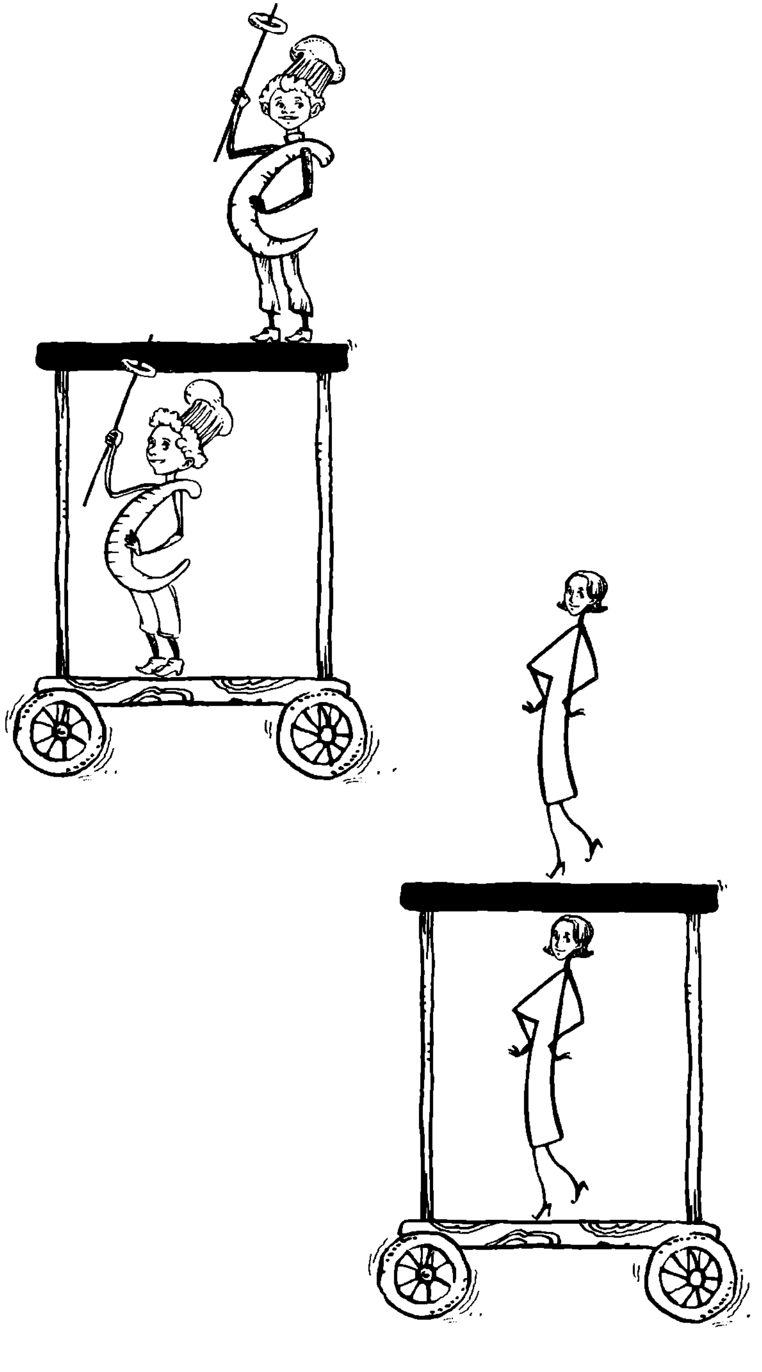
Каждый Цэ съел свои бублики и скрылся. На площадках остались только их палки.

— Вот так фокус! — не удержался я.

— Ну что вы! — скромно сказал Дэ. — Это просто деление двух одинаковых степеней с равными основаниями. И получается при этом единица, делённая на единицу.

— Или просто единица, — добавила Таня.

— Уж конечно! — ввернул я. — Подумаешь, открытие! Всякое число, делённое само на себя, равно единице. Двадцать, делённое на двадцать, равно единице; тридцать, делённое на тридцать,



равно единице; Цэ в третьей степени, делённое на Цэ в третьей степени, равно единице. Об этом и говорить не стоит.

— Ты думаешь? — возразил Олег. — А по-моему, стоит.

— Отчего же?

— Оттого, что теперь я знаю, почему любое число в нулевой степени равно единице.

— Да ну?! Как это ты догадался?

— Очень просто:

$$\frac{c^3}{c^3} = 1,$$

но

$$\frac{c^3}{c^3} = c^{3-3} = c^0.$$

Следовательно:

$$c^0 = 1.$$

Ну и голова у этого Олега! Жаль только, что он до этого не додумался раньше. Не пришлось бы мне срамиться там, у силомера. Впрочем, жалеть об этом не время. Письмо у меня и так получилось очень длинное. Но ты уж потерпи. Осталось немного.

Пекари-жонглёры убежали. А вместо них на поле вышли... Нет, нипочём тебе не догадаться кто! На поле вышли Чёрные Маски. Мы-то думали, что Чёрная Маска одна, а появилась целая армия. Во всяком случае, никак не меньше ста. И тут меня что-то кольнуло. Это проснулся в кармане талисман, о котором мы, сказать по чести, совсем забыли. Уж не хочет ли он намекнуть, что и наша Чёрная Маска тоже здесь? Но как её найдёшь? Ведь все они похожи друг на друга как две капли воды... вернее, как две капли чернил. Добро бы ещё здесь был Пончик. Но он, как назло, куда-то запропал.

Только я это подумал, как по рядам вихрем пронеслось что-то белое, мохнатое. Зрители шарахнулись. Секунда — и Пончик врезался в самую гущу растерявшихся артистов. Тут один из них как побежит! А Пончик — за ним!

— Держите, держите! — заорал я и помчался следом. Таня и Олег — за мной.

Что было! Все перепугались, вскочили. У выходов началась давка. Не знаю, что бы мы делали без стручка. Он снова выскользнул из моего кармана и полетел впереди, указывая дорогу. Скоро мы очутились у совершенно свободного запасного выхода, а там и на улице.

Я хотел спрятать стручок, а он всё летел, летел, пока не привёл нас к какому-то красивому зданию.

У широких стеклянных дверей сидел Пончик. Он тяжело дышал и смотрел на нас виноватыми мокрыми глазами. А над дверьми поблёскивала большая треугольная вывеска: «Абракадабра». Чувствуешь?

Сева.

Комментарии

*1 Для любых чисел a, n, m:

$$a^n \cdot a^m = a^{n+m}.$$

*2 Известно, что если у дроби в числителе и знаменателе стоит один и тот же множитель, то его можно убрать (сократить):

$$\frac{a \cdot b}{a \cdot d} = \frac{\cancel{a} \cdot b}{\cancel{a} \cdot d} = \frac{b}{d}.$$

Поэтому Цэ-числитель и Цэ-знаменатель могут съедать свои бублики:

$$\frac{c^3}{c^2} = \frac{c \cdot c \cdot c}{c \cdot c} = \frac{\cancel{c} \cdot c \cdot c}{\cancel{c} \cdot c} = \frac{c \cdot c}{c} = \frac{\cancel{c} \cdot c}{\cancel{c}} = \frac{c}{1} = c = c^1.$$

Аналогично для произвольных m и n (при $m \geq n$) верно равенство:

$$\frac{c^m}{c^n} = c^{m-n}.$$

*3
$$\frac{c^2}{c^3}=\frac{\cancel{c}\cdot c}{\cancel{c}\cdot c\cdot c}=\frac{c}{c\cdot c}=\frac{\cancel{c}}{\cancel{c}\cdot c}=\frac{1}{c}.$$

*4
$$c^{-n}=\frac{1}{c^n}.$$

Лично Севе от Нулика

Уважаемый радиокомментатор! Большое Вам спасибо за репортаж. Если бы не подпись в конце, я бы ни за что не догадался, что он невзаправдашний.

А сейчас послушайте мой радиорепортаж.

Наша школа выросла. Теперь в ней учатся не только Нулики, но и другие карликанские малыши — цифры. Им очень понравилась алгебраическая гимнастика. Но так как букв у нас нет, решили проделать её с цифрами.

Пять Двоек взяли четыре знака сложения и поставили их между собой:

$$2+2+2+2+2.$$

Потом четыре Двойки убежали. Осталась одна, а около неё встал коэффициент Пять:

52.

Тогда взрослые карликане подняли нас на смех. У вас, говорят, получилось пятьдесят два, а вовсе не пять Двоек. Чтобы правильно сделать приведение подобных, надо между Пятёркой и Двойкой поставить знак умножения. Тут вам, говорят, не Аль-Джебра. Да и вы, говорят, не буквы, а числа[*1].

Выходит: если рядом стоят две цифры — это двузначное число; если же рядом стоят две буквы — это их произведение. Я решил всё проверить на практике.

Потом я спросил, как написать буквами двузначное число? Оказывается, очень просто:

$$10a + b.$$

Здесь a показывает число десятков, b — число единиц.

Я сейчас же записал 52 алгебраическим способом:

$$10 \cdot 5 + 2 = 52.$$

Тут нам пришлось прекратить занятия, потому что прибежала одна Единичка. Она горько плакала. Ей ужасно хотелось стать коэффициентом при какой-нибудь букве. А мама ей сказала, что коэффициент Единица никогда не пишется, а только подразумевается. А эта Единичка подразумеваться не хотела.

Ну, мы как могли её утешили и заодно сделали другое великое открытие: при любой букве всегда имеется коэффициент, только его не всегда видно. Коэффициент, равный Единице, превращается в невидимку. Как только Единичка об этом узнала, она сразу развеселилась. Ещё бы! Это ведь не всякий может — стать невидимкой. Ну вот и всё.

С горячим приветом.

Нулик-Комментатор.

А почему это в вашем репортаже алгебраической суммой называется

$$a + b - c?$$

До сих пор мы знали, что сумма получается только при сложении, а здесь ведь не только складывают, но и вычитают?!

Комментарии

*1 $$2 + 2 + 2 + 2 + 2 = 5 \cdot 2.$$

«Абракадабра»

(Олег – Нулику)

Уф! Вот мы и в «Абракадабре»!

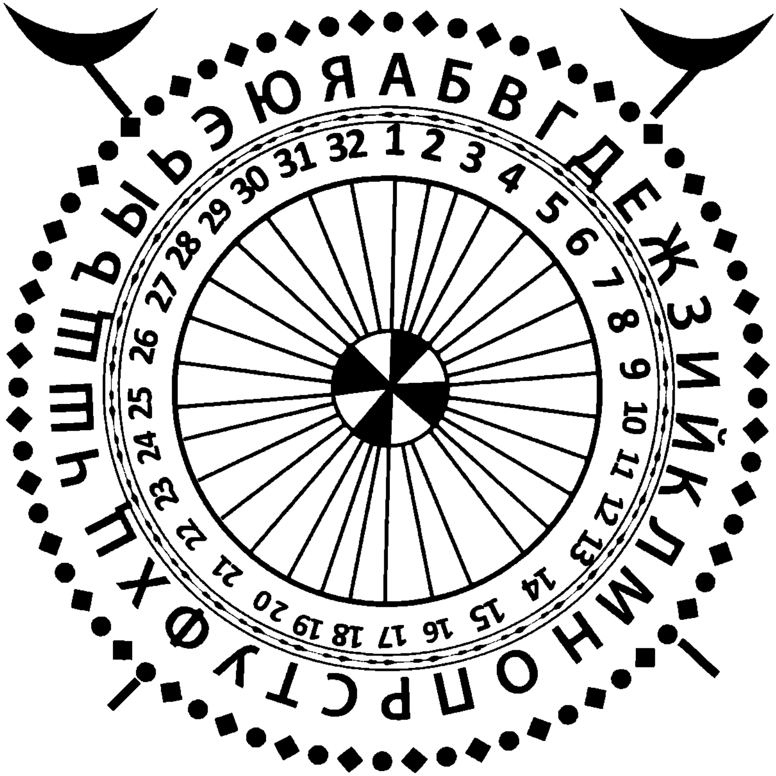
Это очень красивое кафе. Оно всё прозрачное, вроде фонаря. Такие у нас встречаются на каждом шагу. Только всё в нём из треугольников: стены, двери, окна. Даже вывеска, где слово «абракадабра» можно читать по-всякому — и сверху вниз, и ступеньками — как вздумается.

Когда-то это загадочное слово было магическим заклинанием. Теперь так называют всякую бессмыслицу[*1].

Уж не потому ли нам советовали сюда зайти? Нам ведь тоже нужно расшифровать абракадабрскую записку!

Кроме вывески, за зеркальными витринами висят и другие треугольные таблички:

А одна табличка круглая — не то солнце, не то циферблат башенных часов, только без стрелок. Вместо цифр по кругу написаны русские буквы. Все они перенумерованы. А что это значит, мы так и не поняли. Абракадабра!



Нам повезло: все столики были свободны. Мы ведь намного опередили зрителей, покидавших стадион. Из-за стойки, уставленной всякими вкусными вещами, навстречу нам поднялся директор, дородный Пэ из латинского алфавита.

— Очень рад познакомиться. Сегодня у нас исключительно вкусные треугольники. — Он посмотрел на нас многозначительно и добавил: — Уверен, что именно вам они очень понравятся.

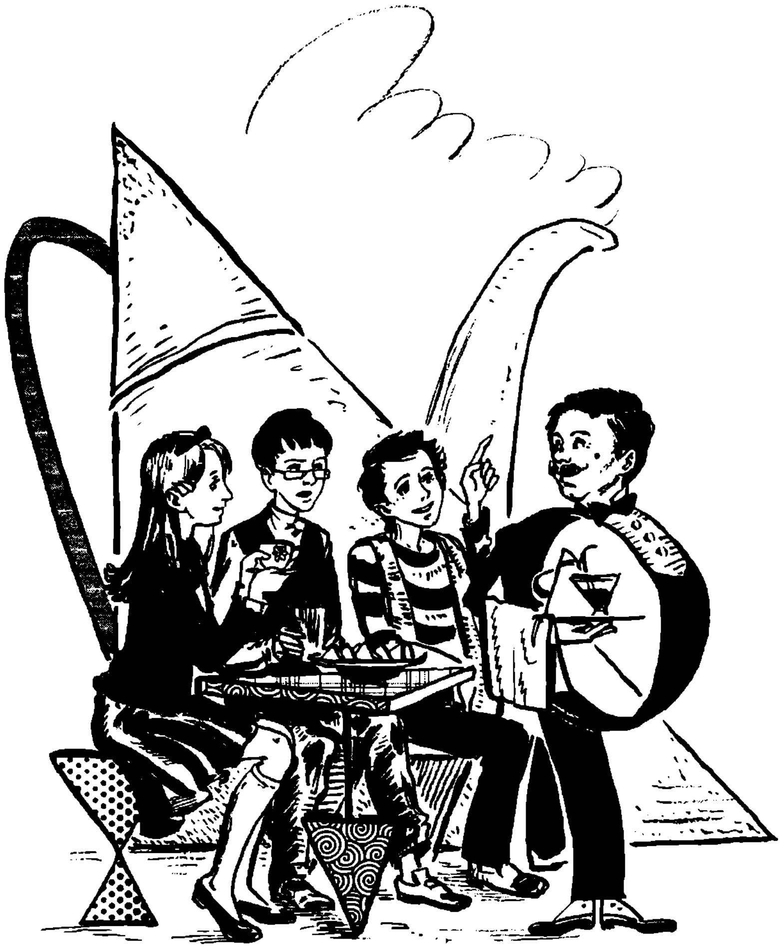
Он подвёл нас к треугольному столу и усадил на треугольные стулья. Сева, конечно, не удержался от вопроса:

— Отчего это у вас всё треугольное?

— В честь Паскаля, — ответил директор.

— Но кто такой Паскаль? Нельзя ли с ним познакомиться?

— Отчего же! Это долг каждого культурного человека. Блез Паскаль — почётный гражданин Аль-Джебры. Он жил в семнадцатом веке во Франции. О! Это был щедро одарённый человек. Он известен не только как талантливый учёный — математик, физик, философ, но и как писатель. В этом вы когда-нибудь убедитесь, прочитав его интересное сатирическое сочинение «Письма к провинциалу». Но занятия литературой не помешали Паскалю изобрести первую счётную машину — прапрабабушку нашего



АБРАКАДАБРА

арифмометра*2. Кроме того, Паскаль знаменит тем, что открыл очень важный закон физики. Это закон давления жидкостей и газов на стенки сосуда. В нашем кафе можно увидеть его в действии. Если вы захотите кофе...

— Что за вопрос! — перебил Сева. — Конечно, мы хотим кофе!

— Тогда подойдите к этим аппаратам.

Пэ подвёл нас к стойке, где стояли до блеска начищенные кофеварки.

— Все эти сосуды, — продолжал он, — самой различной формы, но, заметьте, одинаковой высоты. И рассчитаны они на разное количество жидкости. В этом — четверть литра, в этом — литр, а в этом — два литра крепкого чёрного кофе. Зато донышки сосудов, так же как и высота, совершенно одинаковых размеров. Они прижаты к сосудам особым механизмом с пружинками. Как только вес жидкости в сосуде становится больше силы, с которой пружинки прижимают донышко к сосуду, донышко опускается и отводится в сторону рычажком.

Мы подумали, что пружинки в разных сосудах прижимают донышко с разной силой.

— Ничего подобного, — возразил директор, — пружинки всюду совершенно одинаковые.

— Как же так? — удивились мы. — Ведь сосуды вмещают разное количество жидкости. Чем больше налито кофе, тем больше будет его давление на дно?

— В том-то и суть закона Паскаля, что давление на дно не зависит от количества жидкости в сосуде! — воскликнул Пэ. — Оно зависит лишь от высоты сосуда.

— Проверим! — сказал Сева и решительно направился к самому большому сосуду. Он уже собирался нажать кнопку, чтобы налить себе кофе, но директор его остановил:

— Как? Вы хотите выпить сразу два литра? Но ведь это же очень вредно! Из этого сосуда мы отпускаем кофе на дом многосемейным. Прошу вас за столик. Сейчас я подам вам по чашечке кофе и большую вазу с треугольниками. Они тоже приготовлены по рецепту Паскаля.

Вот не думал, что можно питаться треугольниками! При слове «треугольник» мне сейчас же вспоминаются папины чертёжные принадлежности.

Слава богу, треугольники в кафе «Абракадабра» вовсе не пластмассовые, а вафельные. И с самой разной начинкой: шоколадные, фруктовые, сливочные, ореховые, миндальные. Мы перепробовали все, какие были, и так увлеклись, что не заметили, как кафе заполнилось публикой. Скоро все столики были заняты. К этому времени у нас оставалось всего-навсего три вафли. Все взяли по одной и хотели уже прикончить, но нас остановила Таня.

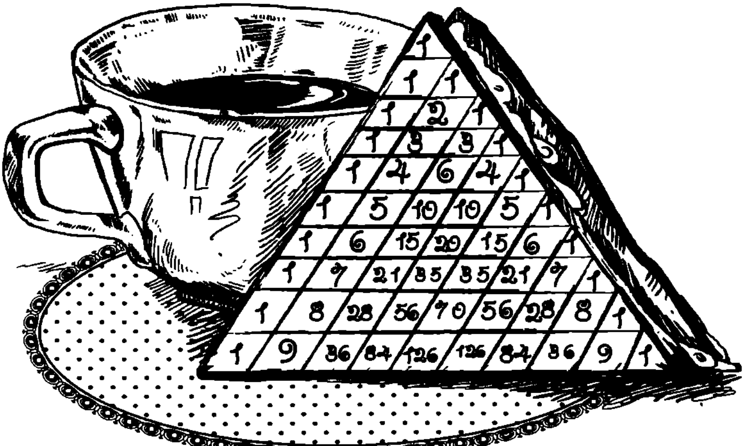
— Смотрите, — сказала она, — на моём треугольнике какая-то надпись.

Тогда и мы посмотрели и увидели, что на вафлях написано: «Треугольник Паскаля».

— Что-то вроде штампа фабрики, — сообразил Сева. — Как у нас «Красный Октябрь» или «Фабрика имени Бабаева».

— А это тоже фабрика Бабаева?

Таня перевернула треугольник другой стороной. Там были выпуклые числа. Мы сличили свои вафли — числа на всех были одинаковые.



Сначала нам показалось, что они расположены беспорядочно. Только слева и справа в каждом ряду обязательно стоит единица. Приглядевшись, мы увидели, что числа определённым образом чередуются. Вот, например, в пятом ряду: 1, 4, 6, 4, 1. В седьмом: 1, 6, 15, 20, 15, 6, 1. Мы заметили также, что, если спускаться по левой стороне треугольника, в первом наклонном столбце написаны единицы, во втором — натуральный ряд чисел: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9... Дальше числа стоят вразброд: 1, 3, 6, 10, 15, 21... А потом и того хуже: 1, 4, 10, 20, 35, 56...

— Одним словом, абракадабра! — проворчал Сева.

— Напрасно думаете, — заметила наша соседка, латинская буква Эс. — В этих числах есть определённый порядок, и разобраться в нём вовсе не трудно.

— Ну, где тут порядок? Где? — горячился Сева.

— Немножко наблюдательности — и вы перестанете спорить. Заметьте, что любое число в этом треугольнике равно сумме двух чисел, стоящих над ним.

— Правда! — сказала Таня. — Число 28 из девятого ряда равно сумме семи и двадцати одного, которые стоят над ним.

— А 126 из десятого ряда равно сумме семидесяти и пятидесяти шести, — сосчитал Сева.

— Вот видите! Никогда не торопитесь с выводами, — сказала Эс. — Часто то, что кажется неразберихой, на самом деле имеет строгий порядок. Надо только его обнаружить. В том-то и задача каждого учёного.

— До чего интересный треугольник придумал Паскаль! — вздохнула Таня.

— О, в этом треугольнике ещё много замечательного. Сложите числа каждого ряда. В первом ряду так и будет единица. Во втором?

— Два.

— В третьем?

— Четыре. В четвёртом — восемь, в пятом — шестнадцать, затем — тридцать два, шестьдесят четыре...

— Слушайте! — закричал я. — Ведь это же разные степени числа два:

$$2^0 = 1;$$
$$2^1 = 2;$$
$$2^2 = 4;$$
$$2^3 = 8;$$
$$2^4 = 16;$$
$$2^5 = 32.$$

Мне показалось, что Эс посмотрела на меня одобрительно.

— Не кажется ли вам, — сказала она, — что все эти степени можно записать одним алгебраическим выражением: 2^{n-1}— два в степени эн минус единица?

— Отчего же не просто два в степени эн?

— Оттого, что эн обозначает порядковый номер строки, а показатель степени здесь всегда на единицу меньше порядкового номера. В первой строке — нуль, во второй — единица, в третьей — два и так далее.

— Ага! — догадалась Таня. — Выходит, сумма чисел, стоящих в десятой строке, будет равна двум в девятой степени, что можно изобразить так: два в степени десять минус единица: 2^{10-1}.

— Или два в степени эн минус единица, — победоносно закончил Сева.

— Очень приятно, что вы это поняли, — обрадовалась Эс.

Но Сева сейчас же доказал, что радоваться рано.

— Жаль, что такое удивительное изобретение используется только для приготовления вафель, — заявил он.

Эс даже поперхнулась.

— Что вы такое говорите! Треугольник Паскаля широко применяется в Аль-Джебре. Он блестяще используется при возведении в степень двучленов. Кстати, этим вопросом занимался не только Паскаль, но и его великий современник, сэр Исаак Ньютон. С его формулой, известной под названием бинома Ньютона, вы познакомитесь несколько позже. Каждому овощу своё время...[*3]

— А! Ньютон! — небрежно отмахнулся Сева. — Это тот самый, который подошёл к нам вместе с Лейбницем на Дороге Светлого Разума. Они там вдвоём что-то такое открыли, а потом разбирались, кто из них первый...[*4]

— Это «что-то такое» положило начало высшей математике. И называется оно анализом бесконечно малых и бесконечно больших величин[*5].

И Эс, сухо попрощавшись, удалилась.

Сева так смутился, что нам его жалко стало.

Но не прошло и пяти минут, как он уже составлял какие-то новые треугольники, которые решил, конечно, назвать своим именем.

Вот один из них. Покажи его своим ученикам. Может быть, вы наведёте в нём порядок.

Будь здоров.

Олег.

Да! Совсем забыл ответить на твой вопрос. Ты хочешь знать, почему $a + b - c$ называется суммой.

Дело в том, что знаки плюс и минус, обозначающие положительные и отрицательные числа, в то же время обозначают сложение и вычитание.

Что значит, например, $\overset{+}{3} + \overset{-}{2}$? Разве это не то же самое, что $3 - 2$?

И то и другое равно единице.

Потому-то в алгебре сумму и разность часто объединяют одним названием: алгебраическая сумма.

Напиши $a + b - c$ так:

$$\overset{+}{a} + \overset{+}{b} + \overset{-}{c},$$

и ты увидишь, что Сева нисколько не ошибся.

Комментарии

*1 *Абракадабра* (лат. *abracadabra*) — магическое слово, впервые упомянуто в конце II века нашей эры в медицинском трактате Самоника, врача римского императора Септимия Севера, для лечения сенной лихорадки. Слово (заклинание против различных болезней) предписывалось использовать следующим образом. Оно выписывалось столбиком на дощечке 11 раз, при этом последняя буква каждый раз отсекалась. Получался треугольник:

ABRACADABRA
ABRACADABR
ABRACADAB
ABRACADA
ABRACAD
ABRACA
ABRAC
ABRA
ABR
AB
A

Такое постепенное укорачивание этого слова должно было якобы уничтожать силу злого духа, и больной, надевая амулет, должен был постепенно выздоравливать.

*2 *Арифмометр* — это настольная механическая вычислительная машина, служившая для умножения, деления, сложения и вычитания. Слово «механическая» означает, что числа вводятся в арифмометр, преобразуются и передаются пользователю (выводятся в окнах счётчиков или печатаются на ленте) с использованием только механических устройств. Для работы на первых арифмометрах необходимо было постоянно крутить ручку. Потом появились вычислительные автоматы, использующие электромотор. Первые счётные машины были созданы

Блезом Паскалем (1642) и Готфридом Вильгельмом Лейбницем (1672). Ни одна из этих машин не получила широкого распространения, так как обе были слишком сложны и дороги для своего времени. Промышленный выпуск арифмометров начался только в XIX веке. В 70–80-х годах XX века арифмометры были вытеснены электронными калькуляторами.

*3 *Исаак Ньютон* (1643–1727) — английский физик, математик и астроном, один из создателей классической физики. Автор фундаментального труда «Математические начала натуральной философии», в котором он изложил закон всемирного тяготения и три закона механики, ставшие основой классической механики. Разработал дифференциальное и интегральное исчисление, теорию цвета и многие другие математические и физические теории.

*4 *Готфрид Вильгельм фон Лейбниц* (1646–1716) — немецкий философ, математик, физик, юрист, дипломат, изобретатель. В математике главная заслуга Лейбница — создание (параллельно с Ньютоном) дифференциального и интегрального исчисления. Известно, что Ньютон сделал своё открытие около 1666 года, но не публиковал его до 1704 года. Лейбниц разработал свой вариант математического анализа около 1675 года, хотя представление о том, что у Ньютона это исчисление уже есть, Лейбниц мог иметь благодаря научным беседам с английскими математиками и переписке с Ньютоном. В отличие от Ньютона, Лейбниц сразу опубликовал своё открытие и в дальнейшем активно его пропагандировал. Школа последователей Лейбница оказалась более успешной, чем школа Ньютона, по причине её открытости и стремления к массовой популяризации идей.

*5 *Высшей математикой* называются те разделы современной математики, которые изучают студенты в университетах и институтах (то есть в высших учебных заведениях). Обычно это аналитическая геометрия, абстрактная алгебра, математический анализ, дифференциальные уравнения, теория вероятностей и элементы математической статистики.

Горячо — холодно

(Сева — Нулику)

Ну, Нулик, держись! Это письмо тебя наверняка удивит и обрадует, потому что... Впрочем, нет! Рассказывать, так по порядку.

Всё ещё торчим в «Абракадабре». То никак не могли попасть, то никак не выберемся. Совсем уж собрались уходить, но вдруг я вспомнил о стручке, сунул руку в карман — пусто!

Искали, искали, лазали по полу — хорошо, пол здесь чистый, — нигде его нет... А потом я подошёл к столу, где мы сидели, и вижу: в вазе на круглой бумажной салфетке лежит один треугольник. Откуда он взялся? Помнится, мы съели все.

Очень мне захотелось взять эту вафлю. На память. Тётя Нина говорит, что это неприлично. Ну, да один раз — куда ни шло! Да и вафелька-то была совсем маленькая. Я поднял её. Глядь — а стручок-то под ней. Неспроста!

Стали мы рассматривать вафельку. Чисел на ней не было. Зато было пять рядов букв. Буквы стояли вразброс, но мы уже знали, что беспорядок бывает обманчивым. И всё-таки, как мы ни старались, никаких закономерностей не открыли. Тогда Таня перевернула вафлю. На другой стороне тоже было пять рядов букв.

Посмотрели — и ахнули! Прочитай, что там было написано, и ахнешь тоже.

Первая весточка от Чёрной Маски! Вот она, тайна, где-то рядом. Как в игре «горячо — холодно». Я чуть не закричал: «Горячо, горячо!»

— Может быть, это ключ к шифру! — сказал Олег.

Он осторожно расслоил вафлю. Вместо одной толстой получились две тоненькие. Мы положили их рядом и стали сличать буквы. Олег вынул карандаш и бумагу и написал два ряда букв.

я о т в а с у ш ё л м а с к а
а п у г в т ф ы и м н д ч о б.

Вот когда мы расшифруем записку!

Но Олег снова задумался:

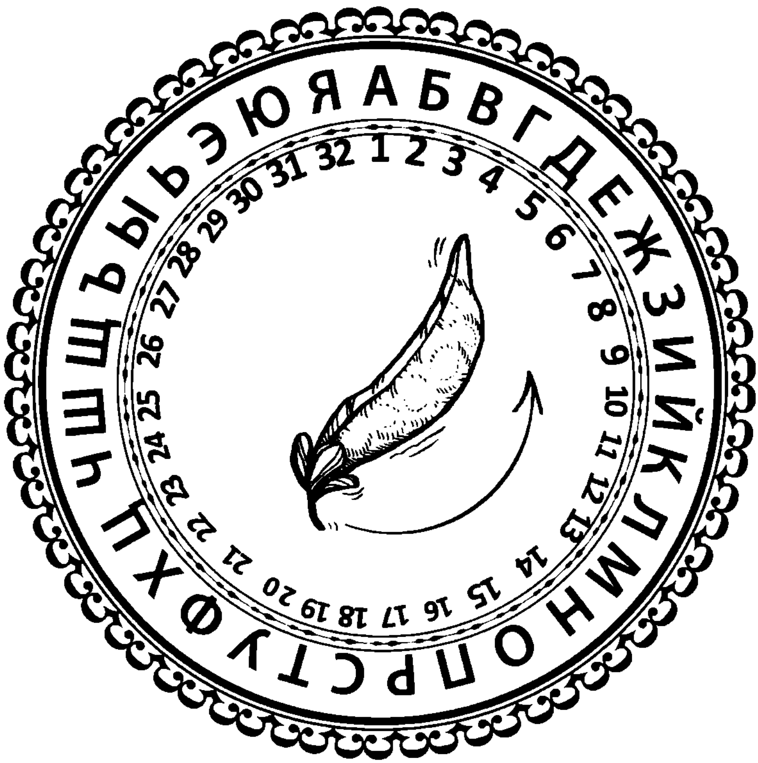
— Нет, тут что-то не так. В первом ряду буква «а» повторяется три раза. Но каждый раз она зашифрована по-разному. Сначала «а» — это «в», потом — «д», потом — «б». Значит, шифр всё время меняется. Но как?

То-то и оно!

Мы опять приуныли.

Я с досадой взглянул на стручок. Разлёгся, как лодырь, на круглой бумажной салфетке, а до нас ему и дела нет.

Только сейчас я заметил, что на салфетке, точь-в-точь как на круглой табличке в витрине, написаны буквы русского алфавита. Под каждой буквой номер. Мы стали рассматривать салфетку.



И вдруг стручок начал медленно вращаться. Совсем как часовая стрелка. Острый кончик его медленно скользил от буквы к букве.

— Смотрите! — сказал я. — После «я» на салфетке написано «а». И в шифре вместо «а» надо читать «я». После «о» стоит «п». И в шифре «п» означает «о». Значит, буквы надо заменять соседними.

— Ничего подобного! — заспорила Таня. — В слове «вас» буква «а» заменена буквой «в». А ведь буква «в» не соседняя, а вторая после «а». А в слове «ушёл» буква «ш» заменена «ы». А это уже третья буква после «ш».

Ну и задача! Абракадабра!

Мы растерянно смотрели на вафли. Но что это! Хочешь верь, хочешь не верь: буквы на шифрованном треугольнике исчезли. Вместо них появились числа.

Треугольник Паскаля! Вот так штука!

Олег внимательно переводил глаза с бумажки на салфетку, с салфетки на вафлю.

— Смотрите-ка, в слове «вас» буква «а» заменяется буквой «в». Это как раз вторая буква после «а». Теперь поглядим на треугольник Паскаля. Там на этом месте тоже двойка. То же самое и в слове «ушёл». Буква «ш» заменяется «ы», которая занимает третье место после «ш». И в треугольнике Паскаля там тоже стоит тройка.

Вот тебе и ключ к шифру! Только подойдёт ли он к нашей записке?

Олег вынул её из потайного кармана, и мы стали расшифровывать. Сначала, правда, запнулись. Понимаешь, слова записки не были заключены в треугольник. А нам надо было знать, по какой строчке треугольника расшифровывать каждое слово. Но Олег быстро догадался, как это делается: если в слове пять букв — расшифровывай по пятой строке треугольника, если восемь — по восьмой и так далее.

Первое слово записки — «трэялрп». В нём семь букв. Но в нашем треугольнике было всего пять строк. Пришлось попросить большой треугольник. Для научных целей. Директор выбрал самый что ни на есть огромный.

Посмотрели на седьмую строчку. Там были такие числа:

1, 6, 15, 20, 15, 6, 1.

Подписали под ними первое слово:

1	6	15	20	15	6	1
т	р	э	я	л	р	п

Теперь надо было отодвинуться по кругу от «т» на одну букву, от «р» — на шесть, от «э» — на пятнадцать... Стали отсчитывать буквы по ходу часовой стрелки. Но вот беда: стручку это почему-то не понравилось. Он упорно двигался в обратном направлении.

Тогда мы смекнули, что по часовой стрелке надо отсчитывать буквы, когда зашифровываешь. А мы-то расшифровываем! Значит, и отсчитывать следует против часовой стрелки. Отсчитали от «т» одну букву назад — получили «с», от «р» шесть букв — получили «к», от «э» пятнадцать букв — получили «о»...

И вот уже вместо дурацкого слова «трэялрп» перед нами хорошее русское слово «сколько». Точно так же расшифровали и следующее слово «вюоп». В нём четыре буквы. Посмотрели на четвёртую строчку треугольника: 1, 3, 3, 1. Оказалось, что это никакое не «вюоп», а просто «было».

Так, слово за слово, распутали мы всю абракадабру. Вот что оказалось в записке:

«Сколько было у меня горошин, если Нулик сперва съел одну треть их, затем прихватил не то две, не то четыре горошины, половину остатка я потерял, а Нулик вернул мне половину того, что он прихватил; потом две горошины я подарил, а последнюю унёс ветер? *Стручок*».

Час от часу не легче! Разгадал одну загадку — теперь разгадывай другую.

Вот какие дела, старик!

Сева.

Старый знакомый

(Таня – Нулику)

Дорогой Нулик! Мы всё ещё в том же заколдованном месте.

Расшифровали записку и стали решать задачу стручка. Бились, бились — ничего не выходит! Хотели уж идти в Автоматическую справочную, но Пэ отсоветовал.

— Если вы в самом деле хотите помочь одному незнакомцу, — сказал он таинственно, — решите эту задачу сами. Но для этого необходимо составить уравнение...

Легко сказать — составить уравнение! Составить треугольник Паскаля — это ещё куда ни шло, но уравнение?..

— Понимаю, — посочувствовал Пэ, — вы ещё не были на нашем образцовом строительстве. Иначе вы уже знали бы, с чем это едят.

— Строительство и уравнение? — покачал головой Сева.

— Ничего удивительного! Неужели вы думаете, что можно построить что-нибудь без уравнений?

Мы хотели сейчас же, сию минуту отправиться на это необыкновенное строительство, но директор напомнил, что сегодня праздник. Придётся подождать до завтра.

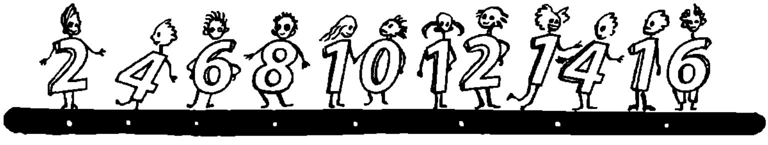
— Кстати, — добавил он, — сейчас в нашем кафе начнётся выступление знаменитого фокусника. Хотите посмотреть?

Не стоило и спрашивать. Кто же откажется от такого удовольствия? И можешь себе представить, на эстраде появился тот самый фокусник, который выступал в карликанском цирке! Мы обрадовались ему как родному. Сейчас он станет делить нуль на тысячу частей, покажет Великана из Бесконечности... Но всё было иначе.

Фокусник поднял руку, и в ней неизвестно откуда появилась длинная палка. Потом он выпустил палку, но она не упала, а продолжала лежать в воздухе, как на столе. Фокусник предложил публике убедиться, что палка не какая-нибудь фальшивая, а выточенная из цельного куска дерева.

Первым на эстраду выскочил Сева, за ним — ещё несколько посетителей. Все они подтвердили, что никакого обмана нет.

Тогда фокусник взмахнул рукой, и вот уже на палке, как воробьи на проводах, уселись его ассистенты — числа:

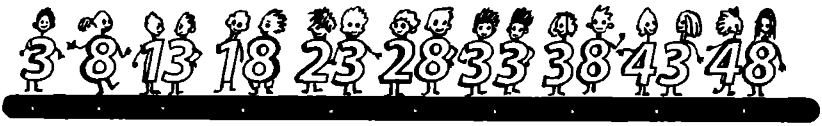


— Обратите внимание, — сказал фокусник, — числа расположены на палке в определённом порядке. Каждое, начиная слева, больше предыдущего на одно и то же число.

— На два! — крикнули из зала.

— Правильно, на два.

Фокусник снова взмахнул рукой, и на палке появились другие числа:



— Попрошу уважаемую публику ответить: какой порядок в этом ряду чисел?

— Каждое число больше предыдущего на пять, — сказала я.

— Благодарю вас, — поклонился фокусник. — Так вот, должен вам сделать потрясающее сообщение: ряд чисел, где каждое последующее число больше предыдущего на постоянную величину, называется ар-р-р-ифметической пр-р-р-рогрессией. Но это ещё не всё. Эта постоянная величина называется разностью прогрессии. И более того: сами числа называются членами прогрессии!

— Ага! Значит, в первом случае разность прогрессии была равна двум, а во втором — пяти, — сказал кто-то.

— Браво! — воскликнул фокусник.

Сева толкнул меня локтем:

— Всё это хорошо, но когда начнутся фокусы?

Фокусник, наверное, услышал его слова. Он лукаво посмотрел на Севу и снова взмахнул рукой. И вдруг палка, толстая палка, выточенная из цельного куска дерева, согнулась посредине, и концы её сошлись. Теперь числа, сидевшие на равном расстоянии от концов, оказались точно друг против друга: три — против сорока восьми, восемь — против сорока трёх и так далее.

— Попрошу сложить любую пару чисел, — предложил фокусник.

Мы сложили: три и сорок восемь. Получилось пятьдесят один. Затем восемь и сорок три. Снова пятьдесят один. Тринадцать плюс тридцать восемь... Что такое? Опять пятьдесят один! И восемнадцать плюс тридцать три, и двадцать три плюс двадцать восемь — все они в сумме давали одно и то же число: пятьдесят один [*1].

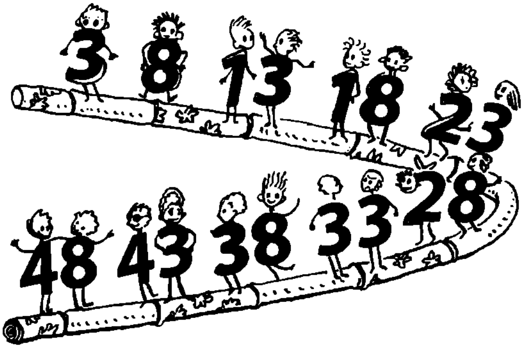
— Вот это уже фокус! — закричал Сева.

— Где фокус? — развёл руками фокусник. — Это вы называете фокусом? Ха-ха-ха! Обыкновеннейшее алгебраическое правило.

— Но в чём же тогда фокус? — хорохорился Сева.

Фокусник небрежно разогнул палку, словно она была из бумаги.

— Попробуйте положить палку в воздухе, согнуть её пополам, потом снова разогнуть, и вы не станете задавать мне такие вопросы!



Все засмеялись, захлопали, а фокусник продолжал:

— Предлагаю сделать небольшой опыт. Кто из вас быстрее сложит все числа этой арифметической прогрессии? Раз, два, три — начали!

В зале зашептались, зашуршала бумага, задвигались карандаши. Мы тоже стали складывать:

$$3 + 8 + 13 + 18 + 23 + 28 + 33 + 38 + 43 + 48.$$

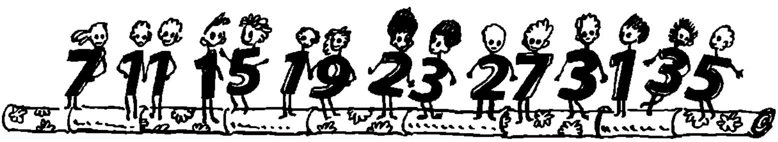
Сначала складывали в уме, потом — столбиком. От волнения всё время сбивались. Нам очень хотелось сосчитать быстрее. Но почему-то получалось медленно. Под конец чуть не подрались.

Но тут фокусник поднял руку:

— Стоп! Никуда не годится, слишком долго считаете. Можно гораздо быстрее. — И он снова согнул палку пополам. — Попрошу убедиться! Перед вами пять пар чисел. Сумма каждой — пятьдесят один, а сумма пяти пар — в пять раз больше. Беру пятьдесят один, умножаю на пять. И что я получаю? Я получаю двести пятьдесят пять![*2] А теперь попробуйте сами. Желающие, подходите, подходите, не стесняйтесь!

Мне уж давно хотелось принять участие в опытах, да как-то неловко было. Но Олег подтолкнул меня, и я очутилась на эстраде.

Теперь на палке были уже другие числа:



— Прошу найти сумму этих чисел, — сказал фокусник. — Быстренько, быстренько!

— В прогрессии восемь членов, — сказала я, — значит, четыре пары. Сумма крайних членов — сорок два. Умножаю сорок два на четыре. Получается сто шестьдесят восемь. Правильно?

— Абсолютно правильно! — подтвердил фокусник. — Сто шестьдесят восемь!

— Но позвольте, — вмешался Сева, — почему вы в Аль-Джебре решаете карликанские задачи? Это же простая арифметика!

— Вот именно простая. Применяя такой способ, мы упрощаем решение. Обратите внимание: упрощение — один из главных девизов Аль-Джебры. Другой её девиз — обобщение. Правило, которое я сейчас вам показал, справедливо для любой арифметической прогрессии. И следовательно...

— Следовательно, его можно выразить буквами, — перебил Олег.

— Великолепно! — воскликнул фокусник. — Вы попали в самую точку. Итак, размещаю на палке не числа, а буквы. Каждый член прогрессии обозначаю буквой a и снабжаю её порядковым числом, чтобы не было никакой путаницы. Такое число называется индексом и ставится чуть ниже и справа от буквы.

Фокусник подал знак, и буквы a в сопровождении индексов быстро расселись на палке:

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7, a_8.$$

— Внимание! Приступаю к выводу формулы. В этом ряду под a_1 и a_2 можно подразумевать любые числа.

— Ну конечно, — сказал Сева, — так же как и под всеми остальными.

— Думайте, думайте, молодой человек! — возразил фокусник. — Ведь все эти a — члены одной арифметической прогрессии. Поэтому произвольно могут быть взяты только первые два a. Величины остальных зависят от разности между двумя первыми. Итак, обозначаю разность буквой d. Ведь разность прогрессии постоянна. Тогда:

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d;$$
$$a_4 = a_3 + d.$$

И так до конца прогрессии. Понятно?

— Понятно, понятно! — закричали все.

— Продолжаю! Надеюсь, все заметили, что в этой прогрессии восемь членов. Или четыре пары. Сумму крайних членов записываю так:

$$a_1 + a_8.$$

Обозначаю сумму всех членов большой латинской буквой Эс — S. Ведь слово «сумма» начинается с этой буквы! Значит,

$$S = 4\ (a_1 + a_8).$$

Кто-то спросил:

— А если в прогрессии десять членов? Как тогда вычислить сумму?

— Точно так же, — ответил фокусник. — Только пар станет уже не четыре, а пять, и последний член прогрессии будет a_{10}:

$$S = 5\,(a_1 + a_{10}).$$

— Стало быть, это справедливо для любого числа членов? — не унимался дотошный зритель.

— Какое число членов вам угодно сложить?

— Пять! Двадцать! Сто семьдесят пять! Двести сорок! Миллион семьсот тысяч! — неслось со всех сторон.

Фокусник закрыл уши руками:

— Тише, тише! Сейчас все ваши просьбы будут исполнены.

Он подождал, когда все успокоятся, и снова заговорил:

— Обозначаю число членов буквой Эн — n. Тогда последний член прогрессии будет a энное — a_n, а сумма крайних членов:

$$a_1 + a_n.$$

Нетрудно догадаться, что число пар будет в два раза меньше числа n, то есть $\frac{n}{2}$. Вот и выходит, что сумма членов запишется так:

$$S = (a_1 + a_n)\frac{n}{2}.$$

— Разрешите спросить, — сказал Олег, — если число членов прогрессии нечётное, как вы его разобьёте на пары?

— А уж над этим вы подумайте сами. Но поверьте честному слову фокусника — формула нисколько не изменится.

Он ещё раз сложил свою палку, и она тут же исчезла. Все захлопали, засмеялись. Фокусник тоже сложился пополам и исчез так же неожиданно, как его палка.

Вот какие фокусы показывают в Аль-Джебре*3.

Таня.

Комментарии

*1
$$3 + 48 = 51.$$
$$8 + 43 = 51.$$
$$13 + 38 = 51.$$
$$18 + 33 = 51.$$
$$23 + 28 = 51.$$

*2
$$3 + 8 + 13 + 18 + 23 + 28 + 33 + \\ + 38 + 43 + 48 = (3 + 48) + (8 + 43) + \\ + (13 + 38) + (18 + 33) + (23 + 28) = \\ = 51 + 51 + 51 + 51 + 51 = 51 \cdot 5 = 255.$$

*3 Выведем формулу для суммы первых n членов арифметической прогрессии. Заметим, что

$$a_2 = a_1 + d;$$
$$a_3 = a_2 + d = a_1 + d + d = a_1 + 2d;$$
$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 2d + d = a_1 + 3d.$$

И так далее. То есть

$$a_n = a_1 + (n-1)\,d.$$

Поэтому:

$$a_1 + a_{10} = a_1 + a_1 + 9d = 2a_1 + 9d;$$
$$a_2 + a_9 = a_1 + d + a_1 + 8d = 2a_1 + 9d;$$

$$a_3 + a_8 = a_1 + 2d + a_1 + 7d = 2a_1 + 9d;$$
$$a_4 + a_7 = a_1 + 3d + a_1 + 6d = 2a_1 + 9d;$$
$$a_5 + a_6 = a_1 + 4d + a_1 + 5d = 2a_1 + 9d.$$

Следовательно,

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} =$$
$$= 5\,(2a_1 + 9d) = 5\,(a_1 + a_{10}).$$

Точно так же при произвольном чётном n сумма первых n членов арифметической последовательности:

$$S = a_1 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)\,d)}{2}.$$

Вычислим сумму первых n членов арифметической последовательности при нечётном n. Пусть $n = 11$. Тогда:

$$S = a_1 + \ldots + a_{11} = a_1 + \ldots + a_{10} + a_{11} =$$
$$= 5(2a_1 + 9d) + a_{11} = 5(2a_1 + 9d) + a_1 + 10d =$$
$$= 11a_1 + 55d = 11(a_1 + 5d) =$$
$$= \frac{11 \cdot 2\,(a_1 + 5d)}{2} = \frac{11(2a_1 + 10d)}{2} = \frac{11(a_1 + a_{11})}{2}.$$

При произвольном нечётном n для доказательства формулы

$$S = a_1 + \ldots + a_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

применяются аналогичные вычисления.

Последняя калитка

(Нулик – отряду РВТ)

Здравствуйте, ребята! Письмо Тани нам ужасно понравилось. И все мои ученики сразу захотели стать фокусниками. Но я сказал, что фокусником буду я, а они – моими ассистентами. Их дело – сидеть на палке.

Сначала на палке никто сидеть не хотел. А когда я их уговорил, оказалось, что сидеть не на чем. Потому что мы нигде не могли найти палку, которая складывается. Я очень расстроился, а все, наоборот, обрадовались и побежали кататься на калитке. Это у нас игра такая. В Арабелле давно уже нет никаких заборов. Случайно остался один по дороге в Римскую провинцию. Там ещё такая скрипучая калитка. Сядешь на неё и ездишь. Вперёд – назад, вперёд – назад!

Ну, я тоже поплёлся. Все стали кататься, а я стоял в сторонке и смотрел. А потом догадался: вот она, палка, которая складывается! То есть не палка, а забор с калиткой. Ведь калитка, если её открыть, доходит до самого забора! А забор сделан из редких поперечных планок. В калитке четыре поперечные планки. Отсчитать ещё четыре на заборе. Выбрать восемь ассистентов – на каждой планке по одному – и открыть калитку до самого конца. Моё предложение понравилось. На палке не хотел сидеть никто, зато на заборе захотели все. Чтобы не было скандала, я отобрал восемь ассистентов по порядку: Единицу, Двойку, Тройку, Четвёрку, Пятёрку, Шестёрку, Семёрку и Восьмёрку.

Сказать по правде, я думал, что это никакая не прогрессия, а натуральный ряд чисел, но у меня другого выхода не было, иначе все бы передрались.

Числа стали на планки. Несколько других ассистентов ухватились за калитку. Я взмахнул рукой, калитка со страшным скрипом поехала к забору... И вот уже у нас получились четыре пары чисел:

4 и 5;
3 и 6;
2 и 7;
1 и 8.

Сложили каждую пару — получилось девять. Вот так штука! Выходит, я сделал открытие: натуральный ряд чисел тоже прогрессия. И разность её равна единице.

Я сложил все числа натурального ряда от единицы до двухсот. Прямо в уме! Вот где мне пригодилась формула фокусника.

Первый член прогрессии $a_1 = 1$, а последний $a_n = 200$. Значит, сумма прогрессии равна:

$$S = (1 + 200)\frac{200}{2} = 201 \cdot 100 = 20\,100.$$

Двадцать тысяч сто! Вот здорово! От радости я изо всех сил ухватился за калитку и стал её раскачивать вместе с ассистентами. И тут ржавые петли не выдержали, калитка отвалилась, и все попадали на землю. Настроение сразу испортилось. Ещё бы! У кого синяк под глазом, у кого штаны порваны... И мы пошли домой.

По дороге я придумал ещё одну прогрессию:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + \ldots$$

И так до тысячи. В этой прогрессии разность равна нулю. Ведь нуль всё-таки число! Подставил числа в формулу, и получилось:

$$S = (1 + 1)\frac{1\,000}{2} = 2 \cdot 500 = 1\,000.$$

А дома мне здорово влетело от мамы — ей уже успели на меня нажаловаться.

— Это что ещё за фокусы? — сказала она. — Никаких калиток! Чтобы больше этого не было!

Больше и не будет. Потому что кататься всё равно не на чем. Калитка-то отвалилась, а она ведь была последняя!

Привет. *Нулик-Фокусник.*

Простота и невероятность

(Олег – Нулику)

Вот мы и расстались с «Абракадаброй». Директор подробно объяснил, как нам завтра пройти на строительство. Мы поблагодарили его за угощение и пошли побродить.

Был уже вечер. Ярко светились огни домов, вспыхивали и гасли разноцветные вывески. Из раскрытых окон доносилась музыка. Там за накрытыми столами собрались жители Аль-Джебры, чтобы отметить свой праздник.

Нам вдруг стало не по себе. Почему-то захотелось домой. Но тут совсем близко раздался голос из репродуктора: «Внимание! Внимание! Через пять минут в Павильоне невероятных задач начнётся праздничное состязание. Председателем жюри единогласно избран всемирно известный барон Мюнхгаузен. Желающих принять участие просят поторопиться!»

Ты, уж наверное, догадался: мы снова очутились рядом с Парком Науки и Отдыха. Можно подумать, ноги несли нас туда сами!

Вот и Павильон невероятных задач. С трудом отыскали свободные места. На эстраду вышли судьи. Мюнхгаузена встретили громкими аплодисментами. Кстати, роль его исполняла буква Ка. Барон учтиво раскланялся и начал:

— Уважаемая публика! Разрешите мне объяснить правила предстоящего состязания. Каждый участник должен придумать задачу. На первый взгляд она должна быть очень простой — такой простой, чтобы всем показалось, что решить её легче лёгкого. Это — первое условие. Второе... О, второе условие — невероятность решения! Разумеется, я не говорю о решении на бумаге. Наоборот, задача должна быть решена в числах, но практически она должна быть невыполнима.

Итак, повторяю: условие состязания — простота и невероятность. Я мог бы для примера рассказать вам что-нибудь из своей практики. Но, к сожалению, все истории, которые со мной случались, были не только просты, но и вполне вероятны. Почему вы смеётесь? Все знают, что барон Мюнхгаузен — самый правдивый человек на свете. Разве не правда, что я верхом на пушечном ядре влетел в неприятельский город? Разве не правда, что я нанизал на бечёвку целую стаю живых уток и вместе с ними взлетел в воздух? Таких правдоподобных историй у меня сколько угодно. Ваше же дело — придумать задачу, не выполнимую на практике. Не подумайте только, что она должна быть бессмысленной. За бессмысленные задачи участники платят штраф и выбывают из состязания. Ну что ж, начнём? Попрошу желающих.

На сцену поднялись пухлая Шестёрка и латинская буква Эн. Барон Мюнхгаузен предложил им тянуть жребий. Первой получила слово Шестёрка. Вот что она рассказала:

— В давние времена на Востоке жил могущественный и грозный шах. Он был несметно богат. Все трепетали перед ним. Приближённые не только исполняли, но и предупреждали любое его желание. Сначала это нравилось шаху. Но настал день, когда всё ему наскучило. Не радовали его больше ни наряды, ни яства, привезённые со всех концов света...

День ото дня становился он всё угрюмее. Напрасно поэты слагали в его честь стихи. Напрасно пели для него самые искусные певцы, танцевали самые прославленные красавицы. Ничто не могло развлечь скучающего владыку. Целыми часами сидел он в своих роскошных покоях, бессмысленно глядя в одну точку. Дошло до того, что он заболел.

Врачи сменялись у его ложа чародеями и предсказателями. Но все их старания ни к чему не приводили. От шаха осталась одна тень. И все поняли, что дни его сочтены.

И вот у решётки шахского дворца появился странник. Босые ноги его были изранены, сквозь грязные лохмотья просвечивало тело. Странник сказался искусным врачом и потребовал, чтобы его пустили к шаху. Стража грубо оттолкнула оборванца. Тот поднял отчаянный крик. Услыхал его вопли шах и пожелал видеть безумца, который осмелился нарушить его покой. Нищего впустили.

— О великий шах, — сказал он, — я пришёл, чтобы излечить тебя от тяжкого недуга.

— Чтобы излечить, надо знать причину болезни, — возразил шах. — Откуда знать тебе то, чего я и сам не знаю?

— Ошибаешься, — сказал странник, — причина твоей болезни — скука. Скука — бич богатых. Им нечего желать, потому что желания их тут же исполняются. Им не о чем думать, потому что за них думают другие. Я принёс тебе лекарство, которое заставит тебя думать.

Странник достал из-под рваного плаща небольшую доску, расчерченную чёрными и белыми квадратами. Он положил её на низенький столик рядом с шахским ложем и выстроил на ней чёрные и белые фигурки.

— Эту игру, — сказал он, — я назвал шахматами: ведь ей предстоит излечить шаха.

С этой минуты шах ни о чём, кроме шахмат, и знать не хотел. Целые дни проводил он вместе со странником за шахматной доской и подолгу размышлял над каждым ходом. Здоровье его заметно улучшилось. А когда ему удалось впервые выиграть партию, он почувствовал себя совершенно исцелённым.

— Требуй у меня всего, чего пожелаешь, — сказал он своему спасителю. — Захочешь — подарю тебе гору золота, захочешь — табун чистокровных арабских скакунов...

— О шах, — перебил его странник, — не надо мне ни золота, ни скакунов. В твоей стране столько голодных! Накорми их — это будет для меня лучшим подарком!

— Какое мне дело до других! — воскликнул разгневанный шах. — Я обещал одарить тебя.

— Для себя мне немного нужно, — улыбнулся странник. — Видишь эту шахматную доску? На ней шестьдесят четыре клетки. Положи на первую клетку одно зёрнышко риса, на вторую — два зёрнышка, на третью — четыре, на четвёртую — восемь. И так удваивай число зёрен на каждой следующей клетке до тех пор, пока не заполнишь последнюю. Вот и всё.

— Только-то?! — облегчённо вздохнул шах. — Мало же ты просишь! Я бы потребовал больше.

Принесли мешок риса, и шах сам начал выкладывать зёрна. На первую клетку положил одно, на вторую — два, на третью — четыре...

Уже на седьмой клетке для шестидесяти четырёх зёрен не хватило места.

— Что же, — сказал странник, — вели ссыпать зёрна в мешок.

Но шаху быстро наскучило считать. Он кликнул слуг. Теперь стали отсчитывать зёрна они: шестьдесят четыре, сто двадцать восемь, двести пятьдесят шесть, пятьсот двенадцать, тысяча двадцать четыре...

Но это была ещё только одиннадцатая клетка!

Стемнело. Зажгли светильники. Слуги чуть не падали от усталости. Когда они дошли до семнадцатой клетки, им нужно было отсчитать шестьдесят пять тысяч пятьсот тридцать шесть зёрен. Но тут они сбились со счёта. Несмотря на то что была уже глубокая ночь, шах велел разбудить мудрецов. Теперь он уже не смеялся — побледнел, осунулся...

Прошли сутки, и ещё одни сутки, и ещё одни сутки, а мудрецы всё считали... Вот уже и они стали валиться от усталости, а конца всё ещё не было видно. Слуги вносили всё новые и новые мешки...

Но вот вбежал насмерть перепуганный хранитель шахских запасов. Он доложил, что в амбарах не осталось ни одного рисового зёрнышка.

— Негодяй! — закричал шах страннику. — Ты разорил меня!

— Я просил тебя накормить голодных, — ответил странник, — ты не захотел этого. Тогда я изменил свою просьбу. И ты счёл меня глупцом. Попробуй теперь сосчитать, сколько зёрен нужно положить на последнюю, шестьдесят четвёртую клетку, и ты поймёшь, кто из нас глупец. Опустоши все рисовые поля на свете — тебе и этого не хватит, чтобы со мной расквитаться.

— Ах так! — в бешенстве закричал шах. — Сейчас ты узнаешь, умею ли я платить сполна. Отрубить ему голову!..

— Такова шахская справедливость, — закончила свой рассказ Шестёрка. — А теперь прошу вас убедиться, что задача эта очень проста, но практически не выполнима. Число рисовых зёрен росло по такому правилу: 1, 2, 4, 8, 16, 32 и так далее. Каждое последующее число больше предыдущего в два раза.

Такой ряд чисел называется геометрической прогрессией. Только, пожалуйста, не путайте её с арифметической. В арифметической прогрессии каждое последующее число больше предыдущего на одно и то же число — оно называется разностью прогрессии. В геометрической прогрессии каждое последующее число больше предыдущего в одно и то же число раз, и число это называется знаменателем прогрессии.

В нашей задаче знаменатель прогрессии равен двум. Если хотите, эту прогрессию можно записать и так:

$$2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, 2^5, 2^6\ldots$$

Нетрудно догадаться, что на шестьдесят четвёртой клетке должно быть 2^{63} — два в шестьдесят третьей степени зёрен, потому что на первую клетку приходится 2^0 — два в нулевой степени зёрен, то есть одно зерно. Но если вы попробуете сосчитать, чему равно два в шестьдесят третьей степени, вы ужаснётесь. Такого огромного количества зёрен никогда не смог бы раздобыть жестокий шах. Он не смог бы даже прочитать это число. Вот оно:

9 223 372 036 854 775 808 —

девять квинтиллионов двести двадцать три квадриллиона триста семьдесят два триллиона тридцать шесть миллиардов восемьсот пятьдесят четыре миллиона семьсот семьдесят пять тысяч восемьсот восемь... Уф!

Попробуйте подсчитать, сколько это килограммов риса, если каждое зёрнышко в среднем весит 0,0182 грамма. Знаете, что получится? Больше ста шестидесяти семи триллионов килограммов!

Стоит ли доказывать, что моя задача хоть и проста, но практически не выполнима?

Шестёрка поклонилась и села. Ей долго хлопали. Потом поднялась латинская буква Эн. Она сказала так:

— Уважаемая Шестёрка познакомила нас с геометрической прогрессией, где все числа непрерывно растут. Такая прогрессия называется возрастающей. Я позволю себе занять ваше внимание сразу двумя геометрическими прогрессиями — возрастающей и убывающей. И сделаю это на одном и том же примере. Задача моя будет так же проста, как и предыдущая, и так же не выполнима. Моя предшественница рассказала прелестную сказку об изобретателе шахмат и коварном шахе. Позвольте и мне задать вам задачу, связанную с шахматами.

Эн вынула из кармана платок, развернула его и показала публике. На платке были нарисованы шестьдесят четыре квадрата, чёрные и белые, — как и на шахматной доске.

— Будем считать, — продолжала Эн, — что этот платок заменяет нам шахматную доску. Обратите внимание: толщина платка равна 0,1 — одной десятой миллиметра. Складываю платок пополам. Теперь его толщина стала вдвое больше: две десятых миллиметра. Зато и площадь его стала меньше в два раза. Складываю платок ещё раз вдвое. Теперь его толщина в четыре раза больше первоначальной, но и площадь уменьшилась в четыре раза. Я предлагаю складывать этот платок вдвое до тех пор, пока возможно.

Эн бросила платок в зал, кто-то его подхватил и стал перегибать: раз, второй... Перегнул в шестой и крикнул:

— Готово! Теперь видна только одна клетка. Толщина платка увеличилась в шестьдесят четыре раза. Ничего невозможного тут нет.

— Вы сложили платок только шесть раз, — возразила Эн самонадеянному зрителю, — а надо было шестьдесят четыре! Понимаете разницу? Если бы вам удалось это сделать, толщина платка стала бы такой большой, что он перерос бы горы, миновал солнце и упёрся бы в какую-нибудь отдалённую звезду.

— А вы докажите! — крикнули в зале.

Тогда Эн стала решать задачу на доске.

— Неужели вы не догадались, что я почти повторила предыдущую задачу? После каждого перегибания толщина платка увеличивается вдвое и возрастает по закону геометрической прогрессии: 2, 4, 8, 16, 32, 64 и так далее. Разница только в том, что после шестидесяти четырёх перегибаний толщина платка станет больше не в 2^{63}, а в 2^{64} раз. Оно и понятно: ведь эта прогрессия начинается не с 2^0 — двух в нулевой, а с 2^1 — двух в первой степени. Толщина развёрнутого платка — 0,1 миллиметра. Чтобы вычислить толщину сложенного платка, надо 0,1 умножить на 2^{64}. Получается

1 844 674 407 371 километр.

Один триллион восемьсот сорок четыре миллиарда шестьсот семьдесят четыре миллиона четыреста семь тысяч триста семьдесят один километр.

А ведь расстояние от Земли до Солнца всего-навсего около ста пятидесяти миллионов километров!

Кажется, условие состязания выполнено: задача проста и практически не выполнима.

— А где же обещанная убывающая прогрессия? — спросил Сева.

— Да здесь же, — ответила Эн. — Ведь в то время как толщина платка увеличивается, площадь его всё время уменьшается:

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}$$

и так далее. Это и есть убывающая геометрическая прогрессия. После шестидесяти четырёх перегибаний площадь станет в 2^{64} раз — в два, взятое в шестьдесят четвертой степени раз меньше первоначальной. И если бы складывали платок дальше, то она всё время приближалась бы к нулю, а толщина (или высота) стремилась бы к Великанам в Бесконечность. Вы согласны? Тогда благодарю за внимание.

В зале снова зашумели, захлопали. Барон Мюнхгаузен позвонил в колокольчик и сказал:

— Жюри одинаково восхищено и той и другой задачей. Обеим участницам вручается первый приз.

Он передал победительницам шахматные доски с красивыми фигурами из слоновой кости и добавил:

— Меня так заинтересовали оба выступления, что следующее путешествие я совершу в Бесконечность. А потом — кто знает? — может быть, доберусь и до Нуля!

Барон поклонился. Соревнования кончились, и мы отправились спать.

Ведь завтра нам идти на строительство! А перед этим не мешает хорошенько отдохнуть.

Олег.

Новые открытия Нулика

(Нулик – отряду РВТ)

Здравствуйте, ребята! Ну и работу вы нам задали! Теперь мы только и делаем, что играем в шахматы. Каждый сам смастерил себе доску и фигуры. Играем с утра до вечера – то друг с другом, а то и каждый сам с собой. Но я всё-таки успел сделать открытие: по шахматной доске сразу видно, что Карликания и Аль-Джебра – друзья. Ведь каждая шахматная клетка имеет своё обозначение, которое состоит из цифр и букв. Например, *e*5, *a*4, *d*8. Разве это не доказательство дружбы?

Задачу с зёрнами всё-таки решили проверить. Конечно, без риса. Просто все стали писать на своих досках, сколько надо положить рисинок на каждую клетку: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128... Когда заполнили первый ряд, выяснилось, что одни пишут слева направо, а другие — справа налево.

Стали спорить, как надо писать. Положили две доски одну под другой. На одной числа написаны внизу, слева направо, на другой — вверху, справа налево. Числа, одинаково отстоящие от края, оказались друг против друга. Прямо как на палке у фокусника!

Я попробовал сложить каждую пару, но одинаковых чисел не получилось. Понятно: ведь прогрессия-то не арифметическая, а геометрическая! Тогда я их перемножил и сделал второе открытие: все произведения оказались совершенно одинаковые:

$$1 \cdot 128 = 128;$$
$$2 \cdot 64 = 128;$$
$$4 \cdot 32 = 128;$$
$$8 \cdot 16 = 128.$$

Да, теперь я уже не тот Нулик, что прежде. Меня и вправду не узнать. А всё ваши письма!

Дальше считать зёрна никто не захотел — кому же охота писать такие огромные числа? Но один Нулик задал интересный вопрос: если на шестьдесят четвёртую клетку надо положить девять с лишним квинтиллионов зёрен, то сколько всего зёрен будет на доске, если, конечно, заполнить все клетки?

— Что тут думать! — сказал другой Нулик. — Всего на доске будет зёрен два в шестьдесят третьей степени. То есть вот эти девять квинтиллионов.

— Ничего подобного, — возразил третий, — девять квинтиллионов будет только на последней клетке, а на всей доске — во много раз больше.

Они заспорили, а я снова посмотрел на свою шахматную доску, где в первом ряду написана геометрическая прогрессия:

$$1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128.$$

После треугольника Паскаля я вообще стал очень внимательно рассматривать числа — всё время ищу закономерности! Вот и сейчас сложил первый член прогрессии со вторым: $1 + 2 = 3$. Сумма их оказалась на единицу меньше третьего члена — четвёрки. Потом я сложил $1 + 2 + 4$. Получилось семь. А это на единицу меньше восьми. $1 + 2 + 4 + 8 = 15$. И это тоже меньше шестнадцати на единицу. Выходит, сумма всех предыдущих членов этой геометрической прогрессии меньше последующего всегда на единицу. А это значит, что на шестидесяти трёх клетках шахматной доски будет столько же зёрен, сколько на последней, шестьдесят четвёртой, только на одно зёрнышко меньше. А всего на доске зёрен будет в два раза больше, чем на последней клетке, минус единица:

$$2 \cdot 2^{63} - 1.$$

А это ведь всё равно что

$$2^{64} - 1.$$

Так я сделал третье открытие. И для этого мне не понадобилось ни писать всю прогрессию до конца, ни умножать девять квинтиллионов с хвостиком на два. Хорошая штука алгебра! [*1]

Нулик-Шахматист.

Комментарии

[*1] Выведем формулу для суммы первых n членов произвольной геометрической прогрессии. Обозначим члены геометрической прогрессии буквами b_1, b_2, ... а знаменатель обозначим q. Тогда

$$b_2 = b_1 \cdot q;$$
$$b_3 = b_2 \cdot q = b_1 \cdot q \cdot q = b_1 \cdot q^2;$$
$$b_4 = b_3 \cdot q = b_1 \cdot q^3$$

и так далее. Чтобы вычислить сумму $S = b_1 + ... + b_n$, заметим, что

$$(1 + q)(q - 1) = q + q^2 - 1 - q = q^2 - 1;$$
$$(1 + q + q^2)(q - 1) =$$
$$= q + q^2 + q^3 - 1 - q - q^2 = q^3 - 1;$$
$$(1 + q + q^2 + q^3)(q - 1) =$$
$$= q + q^2 + q^3 + q^4 - 1 - q - q^2 - q^3 = q^4 - 1.$$

Точно так же можно показать, что

$$(1 + q + ... + q^{n-1})(q - 1) = q^n - 1.$$

Поэтому

$$1 + q + ... + q^{n-1} = \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Тогда, например:

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 = b_1 + b_1q + b_1q^2 + b_1q^3 =$$
$$= b_1 (1 + q + q^2 + q^3) = b_1 \cdot \frac{q^4 - 1}{q - 1}.$$

Для произвольного n

$$S = b_1 + ... + b_n = b_1 + b_1q + ... + b_1q^{n-1} =$$
$$= b_1 (1 + q + ... + q^{n-1}) = b_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

В задаче Нулика $b_1 = 1$, $q = 2$ и $n = 64$. Поэтому:

$$S = 1 \cdot \frac{2^{64} - 1}{2 - 1}.$$

Волшебная практика

(Сева — Нулику)

Мы чуть не опоздали к началу рабочего дня. И всё из-за Тани. На стройках, говорит, всегда пыль и грязь. Как бы мне, говорит, там не испортить любимого платья в оборочках. Наконец она появилась в комбинезоне и сапогах, на голове косынка, защитные очки. Прямо хоть снимай для газеты: «Знатная электросварщица Татьяна Н.».

Девчонок хлебом не корми — дай надеть какую-нибудь обновку. Я-то знаю, что не платья ей жалко, — просто захотелось покрасоваться в комбинезоне.

Ну и лицо у неё было, когда она увидела, что строительство больше похоже на ухоженную детскую площадку, где ребята заняты разными техническими играми: пилят, вырезают, конструируют... Только «игрушки» здесь были гораздо крупнее. Кружевные стрельчатые краны легко передвигали в воздухе разноцветные пластикатные детали.

К нам подошла нарядная латинская буква Эф. Она удивлённо покосилась на Танин костюм:

— Хотите познакомиться с нашим экспериментальным строительством? Я вас провожу.

Первым долгом поинтересовались, что здесь строят.

— Да всё что угодно, — ответила Эф. — Домá, машины, бассейны...

Мы залюбовались высоким домом из разноцветных кубиков... Он вырос прямо на наших глазах — ни дать ни взять воздушный замок. И как же мне жалко стало, когда этот замок вдруг рассыпался, а на его месте возникло длинное двухэтажное здание с плоской крышей.

— Охота была строить, а потом разрушать! — подосадовал я.

Но Эф объяснила, что здесь не просто строят, а делают расчёты, которые тут же проверяют на практике. Я подумал, что если это и практика, то, во всяком случае, волшебная.

К нам подошёл солидный карликан, Девятка.

— Здравствуйте, — обратился он к Эф. — Мы строим дом. Нам надо вырыть котлован для фундамента. Имеются три экскаватора. Первый может вырыть котлован за четыре часа, второй — за три, третий — за двенадцать. Через сколько часов будет готов котлован, если все три экскаватора работают одновременно? Это очень важно! Без этого я не смогу составить график строительства.

— Обратитесь к Главному Составителю, — ответила Эф.

Мы переглянулись.

— Нельзя ли и нам повидать Главного Составителя? — спросила Таня.

— А вы разве умеете решать уравнения? — поинтересовалась Эф.

Таня только покраснела. А я сказал напрямик, что мы об этом понятия не имеем.

— В таком случае вам придётся начать с азов! Чтобы решить уравнение, следует прежде всего познакомиться с отрицательными числами.

Ну, это-то мы знали!

Эф облегчённо вздохнула:

— Тогда я могу зачислить вас на строительство в качестве практикантов.

— И мы сейчас же начнём составлять уравнения? — брякнул я.

— О, до этого далеко. Сперва придётся поработать в весовой.

Что ты скажешь? Опять отсрочка! В кармане лежит готовая задача, а ты, изволь радоваться, работай весовщиком!

Эф заметила, как мне досадно.

— В нашем деле лучше не торопиться, — сказала она, — это верный способ сэкономить время.

Ничего не поделаешь, пошли в весовую. Кстати, я давно не взвешивался. А в этой Аль-Джебре похудеешь!

Сева.

Весовая

(Таня — Нулику)

Что ни говори, Нулик, Аль-Джебра — удивительное государство! Вчера были в современном кафе, сегодня — на сверхскоростном строительстве, и вот не успели опомниться, как попали в гости к древнему восточному кудеснику.

Как ты себе представляешь весовую? Большой амбар, тяжёлые неуклюжие весы. У весов — дюжий весовщик в брезентовом фартуке и рукавицах. А вокруг — мешки, ящики, корзины...

Так вот, ничего подобного не было. Нас ввели в полутёмный сводчатый зал с тонкими витыми колоннами, такой высоченный, что потолка не видно. Будто над тобой ночное небо, только без луны и звёзд. Вместо них в полумраке светятся какие-то закорючки и загогулины. Должно быть, восточные письмена. Посреди зала — большие старинные весы: тяжёлые медные чашки, подвешенные на цепях к концам металлического коромысла. Весы тоже сплошь в закорючках и загогулинах. Они парят в воздухе, как большая диковинная птица. А между чашками, словно глазок радиоприёмника, сверкает зелёный кошачий глаз.

— Садитесь, — шепнула Эф.

Мы оглянулись: ни стульев, ни кресел. Только несколько пёстрых ковриков на полу. Эф уселась на одном из них, скрестив ноги. Мы сделали то же самое.

Бам! Что-то зазвенело — будто стукнулись два медных подноса, — и из темноты вынырнула фигура в длинном чёрном балахоне с жёлтыми разводами. На голове — белая шёлковая башня. Называется тюрбан. И борода у него тоже белая и шелковистая.

— Главный Весовщик, — шепнула Эф. — Следите за ним внимательно.

Весовщик приложил руку к сердцу и поклонился. Мы тоже приложили руки к сердцу и поклонились. Потом он взмахнул палочкой, и на каждой чашке весов появилось по Семёрке — обе в светящихся костюмах. Я так на них загляделась — даже не заметила, что в кошачьем глазке засветились две чёрточки. Эф легонько толкнула меня локтем.

— Это знак равенства. Семь равно семи, — негромко сказала она.

$$7 = 7.$$

— Уж конечно, не восьми, — фыркнул Сева.

Но тут Весовщик снова взмахнул палочкой, и на правой чашке весов вместо Семёрки оказалась Восьмёрка. Чашка сразу опустилась. Мы взглянули на зелёный глазок: чёрточки знака равенства соединились слева и образовали уголок:

$$7 < 8.$$

— А вот знак неравенства. Он обозначает, что семь меньше восьми, — пояснила Эф.

Тут Восьмёрка и Семёрка поменялись местами. Теперь уже опустилась левая чашка. Чёрточки в кошачьем глазке снова задвигались и соединились правыми концами:

$$8 > 7.$$

— Понятно, — сказал Олег, — этот знак показывает, что восемь больше семи. Выходит, там, где палочки сходятся, стоит меньшее число, а там, где они расходятся, — большее.

— Детские игрушки, — проворчал Сева.

Весовщик не обратил внимания на его дерзость. Он взмахнул палочкой, и вот уже вместо чисел на весах засветились буквы: слева $a + b$, справа c. Между ними загорелся знак равенства:

$$a + b = c.$$

Но в Севу точно бес вселился! Всё ему не нравилось.

— Почему это, — придрался он, — Весовщик думает, что

$$a + b = c?$$

— А он вовсе и не думает — он требует этого, — ответила Эф. — Наверное, ему для какой-то задачи понадобилось, чтобы левая часть непременно была равна правой.

— А может быть, он всё-таки ошибается? — заупрямился Сева. — Ведь под буквой можно подразумевать любое число! Вот я сейчас попрошу заменить все три буквы числами.

Он встал и подошёл к Весовщику. Признаться, я очень испугалась: вдруг Весовщик рассердится и превратит Севу в какое-нибудь неравенство? Но он вовсе не рассердился. Наоборот, прижал руку к сердцу, и вот уже на левой чашке весов вместо буквы a стоит число Четыре, вместо b — Пять, а на другой чашке вместо c — Девятка:

$$4 + 5 = 9.$$

Но Сева не унимался:

— Нет, так не пойдёт, уважаемый Главный Весовщик! Вы просто поставили те числа, которые вам выгодно. Позвольте, я сам!

Он назвал другие числа. Весовщик улыбнулся и снова пустил в ход свою палочку. Коромысло закачалось, в глазке зажёгся знак неравенства. И мы увидели вот что:

$$6 + 7 < 20.$$

— Что я говорил! — закричал Сева. — Выходит, a плюс b не равно c.

И тут молчаливый Весовщик не выдержал.

— О неразумный отрок! — заговорил он тонким скрипучим голосом. — Если ты хочешь стать мудрецом, не болтай языком, не подумав. Под буквами действительно можно подразумевать произвольные числа. Но только до тех пор, пока они не связаны знаком равенства. В равенстве $a + b = c$ можно произвольно заменить числами не три, а только две буквы. Величина третьей выяснится сама собой. Замени две из этих букв числами.

Сева подумал, пошевелил губами...

— Пусть a будет равно пяти, а c — двенадцати.

На весах появилось выражение:

$$5 + b = 12.$$

— Скажи теперь, — улыбнулся Весовщик, — можно ли вместо b подставить любое число?

Но Сева не успел и рот открыть, как на весах вместо буквы b засветилась Семёрка:

$$5 + 7 = 12.$$

Сева почесал за ухом.

— Да! С этими равенствами не разгуляешься. Зато уж в неравенстве подставляй что душе угодно — так неравенством и останется.

Весовщик укоризненно покачал головой:

— Опять говоришь, не подумав. Неравенство неравенству рознь.

Он взмахнул палочкой. На левой чашке весов появились $c + d$, на правой — e, а между ними — знак неравенства:

$$c + d < e.$$

Правая чашка весов опустилась.

— Назови вместо этих букв любые числа, — предложил Весовщик.

Сева назвал. И на левой чашке весов мы увидели 4 + 8, а на правой — 9. Левая чашка опустилась, и знак неравенства повернулся остриём вправо:

$$4 + 8 > 9.$$

— Ага! Неравенство сохранилось, — обрадовался Сева.

— Да, — сказал Весовщик, — но теперь левая часть стала больше правой, а не меньше, как мы условились.

— Почтенный Весовщик, — вмешался Олег, — вы хотите сказать, что, подставив в левую часть этого неравенства 4 + 8, справа можно подставить любое число, но при одном условии: оно должно быть больше двенадцати. Тогда левая часть всегда будет меньше правой.

— Вот именно, вот именно! — умилился Весовщик и так закивал головой, что вот-вот борода отвалится! Потом он перестал кивать и взглянул на Севу. Тот стоял надутый, взъерошенный, как воробей после драки.

— Вижу, — сказал Весовщик, — тебе во что бы то ни стало хочется подставлять любые числа под все буквы. Так и быть, попробуй ещё разок.

На весах засветилось равенство:

$$3a + 2b = 2a + 3b - b + a.$$

— Нет уж, спасибо! — Сева даже руками замахал. — Теперь меня не проведёшь.

— Зря отказываешься. В этом примере можно подставлять вместо a и b любые числа, какие вздумается.

Весовщик подставил вместо a Четвёрку, вместо b — Тройку:

$$3 \cdot 4 + 2 \cdot 3 = 2 \cdot 4 + 3 \cdot 3 - 3 + 4.$$

И сейчас же числа эти исчезли, уступив место числу 18 на каждой чашке весов:

$$18 = 18.$$

Сева растерянно поморгал глазами. Опять он попал впросак. Но почему?

— Да потому, — ответил Весовщик, — что это равенство особое. Оно называется тождеством. Какими числами ни заменяй буквы в тождестве, равенство всё равно сохранится.

— Но как отличить тождество от обычного равенства, не подставляя чисел вместо букв? — спросила я.

— Для этого надо обе части равенства сделать совершенно одинаковыми. Смотрите!

Мы увидели на весах прежнее тождество:

$$3a + 2b = 2a + 3b - b + a.$$

Тут Весовщик протянул руки к правой чашке весов и как закричит:

— Подобные, приведитесь!

И сейчас же $2a$ в правой части соединились ещё с одним a; $3b$, из которых вычли одно b, превратились в $2b$, и на весах образовалось другое выражение:

$$3a + 2b = 3a + 2b.$$

Покончив с тождеством, Весовщик взмахнул палочкой, и на ней очутился металлический обруч. С такими у нас занимаются художественной гимнастикой.

Я чуть не фыркнула: неужели Весовщик собирается танцевать с обручем? Вот будет весело! Но танцевать он не стал, а достал верёвочку и измерил ширину круга в самом его широком месте.

— Эта ширина называется диаметром круга, — пояснил он. Хотя кто же этого не знает?

Потом Весовщик стал укладывать этот верёвочный диаметр по обручу, чтобы измерить длину окружности. Сделал отметку, уложил верёвочку один раз, второй, третий, но до отметки всё ещё не дошёл. Выходит, длина окружности больше, чем три её диаметра. Весовщик стал откладывать верёвочку в четвёртый раз, но её оказалось слишком много. На глаз получалось, что надо отложить только одну пятую верёвочки. Весовщик отрезал одну пятую, но и этот кусочек оказался длиннее, чем нужно. Значит, длина окружности меньше, чем три и одна пятая диаметра.

Тогда Весовщик разрезал этот кусочек верёвки пополам, и он стал равен одной десятой диаметра. Но теперь его не хватило до отметки. Значит, длина окружности меньше, чем три и одна пятая, но больше, чем три и одна десятая диаметра*[1].

Долго Весовщик возился с этой задачей, а потом улыбнулся и сказал:

— О мои юные друзья, я пошутил. Я и раньше знал, что решить эту задачу точно невозможно. Мне только хотелось, чтобы вы убедились в этом сами. Во сколько раз длина окружности больше своего диаметра, можно подсчитать только приближённо. Вычислите это число с точностью хоть до миллиона знаков, оно всё равно не будет совершенно точным.

— Значит, это — иррациональное число? — спросил Олег.

— Конечно! — подтвердила Эф. — Мы можем указать, где оно живёт на монорельсовой дороге, но выразить его точным числом нельзя. В Аль-Джебре его обозначают греческой буквой Пи — π. Смотрите, вот оно.

На левую чашку весов вспорхнула буковка, слегка напоминающая русское «п», а на правой появилось число 3,14.

— Число Пи приближённо равно трём целым и четырнадцати сотым, — объяснил Весовщик.

Он взмахнул палочкой. Чашка с буквой Пи чуть-чуть опустилась, а в кошачьем глазке появились две волнистые линии: ≈.

— Это знак приближённого равенства, — пояснила Эф. — На самом деле Пи немножко больше, чем 3,14. Поэтому левая чашка слегка перевешивает.

$$\pi \approx 3{,}14.$$

Снова стукнулись два медных подноса, и Главный Весовщик исчез. Прямо-таки растаял [*2].

— Перерыв на пятнадцать минут! — объявила Эф.

Как ты думаешь, может, и мне объявить небольшой перерыв?

Таня.

Комментарии

[*1] $3\frac{1}{10}d < l < 3\frac{1}{5}d$, где l — длина окружности, d — её диаметр.

[*2] Длина окружности вычисляется по формуле:

$$l = \pi \cdot d,$$

где d — диаметр круга. Или приближённо:

$$l \approx 3{,}14 \cdot d.$$

Число π иррациональное, поэтому его нельзя записать как конечную десятичную дробь. Можно сделать это только приближённо. Например, если округлить число π до семи знаков после запятой, получится:

$$\pi \approx 3{,}141\,592\,6.$$

Аль-джебр!

(Сева – Нулику)

Знаешь, Нулик, напрасно я злился на этого Весовщика. Он даже почище фокусника. Фокусников и у нас пруд пруди. А настоящего живого чародея днём с огнём не сыщешь.

В перерыве я подговаривал ребят смыться. Сколько можно возиться с неравенствами, равенствами и всякими Пи? Пришли составлять уравнение, так чего там!.. Но Олег сказал, что сперва неплохо бы выяснить, что такое уравнение. Ах да! Я и позабыл.

Снова стукнулись медные подносы, вернулась наша Эф, и мы опять уселись на коврики. Только я хотел спросить, где же Весовщик, а он уж тут как тут! Сидит под весами, словно никуда не исчезал.

Весовщик взмахнул палочкой, и над каждой чашкой весов появилось по числу 14. В глазке засверкал знак равенства.

«Здравствуйте! – подумал я. – Всё сначала!»

Но я ошибался. Кроме чисел 14, на каждой чашке весов появилось по Пятёрке:

$$14 + 5 = 14 + 5.$$

Чашки не дрогнули, глазок по-прежнему показывал равенство. Потом вместо этих чисел на весы стали две суммы:

$$a + b = c + d.$$

И снова подле каждой из них засветились одинаковые числа, на этот раз Тройки:

$$a + b + 3 = c + d + 3.$$

Чашки не шелохнулись.

— Видите, — сказал Главный Весовщик, — если к обеим частям прибавить по одинаковому числу, равенство не нарушится. Понятно, что можно не только прибавить, но и вычесть по одинаковому числу. Можно умножить обе части или разделить их на одинаковые числа — равенство всё равно сохранится.

— А если прибавить не числа, а одинаковые буквы? — спросил я.

— На здоровье! — ответил Весовщик. — Ведь буква — то же число. Вот смотрите.

Теперь к суммам на весах прибавились буквы n. Равенство не исчезло:

$$a + b + 3 + n = c + d + 3 + n.$$

Ох и заскучал я от этих равенств, даже спать захотелось! Но тут случилось такое, что сон с меня как ветром сдуло.

На левой чашке весов засветилась буква, на которую я до сих пор и внимания не обращал, — Икс из латинского алфавита: x. Ты её знаешь, она точь-в-точь знак умножения или русское

Ха. Ставь её на голову, поворачивай спиной — со всех сторон одинаковая! Рядом с Иксом засветилась Тройка, между ними вспыхнул знак минус, а на правой чашке весов оказался твой тёзка, Нулик:

$$x - 3 = 0.$$

В кошачьем глазке появился знак равенства и... Только не пугайся! Икс быстро обернулся (он, оказывается, стоял к нам спиной), и мы увидели, что на нём чёрная маска. Вот так история! Подумать только, под Чёрной Маской скрывается Икс!

Тут мы все повскакали, бросились к этому Иксу, схватили его за руки — а вдруг опять убежит? А он и не думает убегать. Стоит себе, глазами хлопает.

— В чём дело? — спрашивает. — Мы как будто незнакомы.

— Как? Разве не вы та самая Чёрная Маска, которая подбросила Нулику зелёный стручок? И разве не вас мы должны расколдовать?

— Нет, я не тот, кого вы ищете. Ведь в Аль-Джебре нас, Иксов, как капель в море. Этой буквой обозначается неизвестное число.

Пришлось нам извиниться и вернуться на свои коврики. Но кое-что мы всё-таки разузнали: Чёрная Маска — неизвестное число.

А Весовщик продолжал как ни в чём не бывало:

— Перед вами равенство $x - 3 = 0$. Но оно немного отличается от тех, что я вам показывал до сих пор. Это не тождество, не просто равенство, а *уравнение первой степени.*

«Давно бы так!» — подумал я.

— В чём его особенность? — продолжал Весовщик. — Если в тождестве можно заменить любыми числами все буквы, а в обычном равенстве — только некоторые, то в уравнении первой степени вместо буквы Икс может стоять только одно-единственное число. Иначе равенство нарушится. Найти это единственное неизвестное число и значит решить уравнение. Пока уравнение не решено, никто не знает, чему равен Икс. Потому-то он и надевает чёрную маску. Стоит решить уравнение, и маска упадёт сама собой.

С этой минуты скуки моей как не бывало. Я вдруг понял, что всё, что мы до сих пор узнавали в Аль-Джебре, нужно, чтобы решить уравнение и расколдовать Чёрную Маску. Не зря мы дрожали от страха в тёмном подземелье, не зря торчали на воздушной монорельсовой дороге, корпели над шифром в «Абракадабре», не зря и сейчас слушаем этого кудесника с белой башней на голове. А в том, что он кудесник, можешь не сомневаться. Разве простой человек заставил бы меня полюбить то, что я терпеть не мог?

Теперь Весовщик говорил, а я смотрел ему в рот, боялся словечко пропустить.

— Как же решается уравнение $x - 3 = 0$? Это очень простое уравнение. Чтобы решить его, достаточно, пожалуй, одного заклинания.

Он распахнул руки в широченных шёлковых рукавах и завопил:

— Аль-джебр!

«Аль-джебр, аль-джебр!» — отозвалось где-то наверху.

И сейчас же на весах появилось равенство:

$$x - 3 + 3 = 3.$$

— Вы уже знаете, — пояснил Весовщик, — если прибавить к обеим частям равенства по одинаковому числу, ничего не изменится. Вот я и поставил на каждую чашку весов по числу Три.

Но тут обе Тройки слева от знака равенства исчезли.

— Куда это они? — удивился я.

— Неужели ты забыл правила движения на монорельсовой дороге? Минус Три и плюс Три — числа с разными знаками. Значит, они взаимоуничтожаются. Получается, что Икс равен Трём:

$$x - \cancel{3} + \cancel{3} = 3.$$

На весах появилось новое равенство:

$$x = 3.$$

Чёрная маска, закрывавшая лицо Икса, свалилась. Икс низко поклонился и убежал.

— Занятно! — Олег задумчиво поглядел на весы. — В уравнении $x - 3 = 0$ Тройка была на левой чашке весов. Теперь она очутилась на правой.

— Правильно, — подтвердил Весовщик. — Но слева она была со знаком минус, а справа оказалась со знаком плюс. Хоть он там и не стоит, но подразумевается.

— Зачем же тогда добавлять к обеим частям уравнения по Тройке? — сказал Олег. — Можно ведь просто перенести Тройку с левой чашки весов на правую, только с обратным знаком.

— Твои слова для меня как мёд! — поклонился Весовщик. — Именно так и решают уравнения. А Тройки я прибавил лишь затем, чтобы вы поняли, почему можно переносить число с одной стороны на другую. Да будет вам известно, что перенос отрицательного числа из одной части равенства в другую называется восстановлением. Название это осталось у нас с тех самых пор, когда отрицательные числа считались бессмысленными. Перенос отрицательного числа в другую часть равенства с обратным знаком как бы восстанавливал его в правах, превращал в положительное число. Восстановление — по-арабски «аль-джебр». Это волшебное слово завещал нам великий учёный Мухаммед ибн Муса аль-Хорезми. Оно есть в заглавии написанной им книги, которая положила начало нашему государству и называется «Книга восстановлений и противопоставлений».

كتاب الجبر و المقابلة

Он указал на светящиеся в полумраке арабские письмена и прочитал: «Кита́б аль-джебр валь-мука́бала».

— Большое вам спасибо, — сказал Олег. — Что такое восстановление, мы как будто поняли. Но что такое противопоставление?

Тут снова стукнулись медные подносы. Весовщик загадочно улыбнулся и растаял в темноте. Мне послышался голос мамы Двойки: «Всякому овощу своё время!» С тех пор как мы здесь, эта пословица так и звенит у меня в ушах!

Даже не верится: неужели настанет день, когда мы сядем рядом, возьмём задачу зелёного стручка и решим её сами, без всяких провожатых и весовщиков?

Сева.

Вверх-вниз!

(Олег – Нулику)

Что ты скажешь, Нулик, не дают нам лететь вперёд сломя голову!

Вышли из весовой, спрашиваем у Эф:

— Когда начнём составлять уравнения?

А она:

— Сперва научитесь решать.

— Вот те раз! Сперва решать, а составлять потом?

— В Аль-Джебре считают, что так целесообразней.

Что ж, решать так решать. Чем скорее, тем лучше.

— Как раз наоборот, — отвечает Эф, — чем скорее, тем хуже. На сегодня довольно. Ваш рабочий день кончился. Отдохните, а завтра приходите снова.

И мы пошли отдыхать.

В общем, это не так уж плохо, особенно если под боком Парк Науки и Отдыха.

В парке, как всегда, было полно народу.

Стали думать, куда пойти. Сева непременно хотел посмотреть что-нибудь новенькое. Тане не терпелось опять побывать у силомера. Но я их помирил: предложил пойти к силомеру и всё-таки увидать кое-что новое. Потому что мы ведь не успели заглянуть в колодец, где живут отрицательные числа!

Когда мы подошли к молотку, какой-то чудак возводил в квадрат квадратные корни. Задумает, например, корень квадратный из трёх и возведёт его в квадрат. Понятно, ничего, кроме трёх, при этом получиться не может. Потому что извлечение корня и возведение в степень — действия взаимоуничтожающиеся.

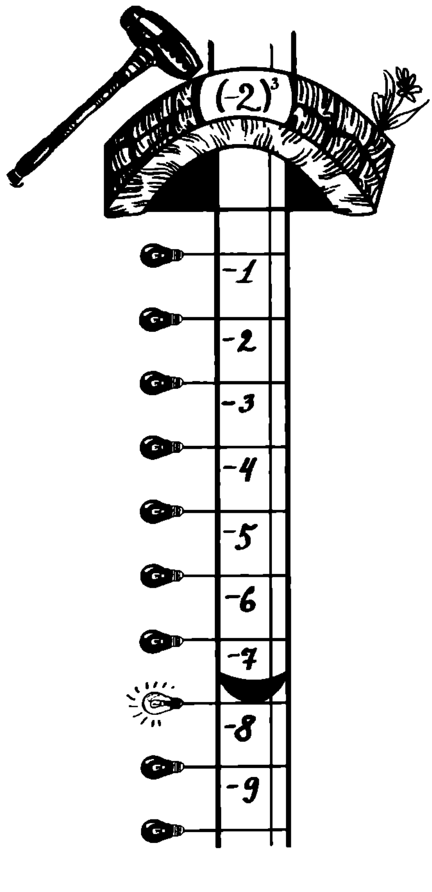
$$(\sqrt{3})^2 = 3.$$

Представь себе, что к какому-нибудь числу прибавили пять и тут же снова вычли. От этого число не изменилось. Точно так же не изменится число, если из него сперва извлекут корень квадратный, а потом снова возведут в квадрат.

Покончив с квадратными корнями, чудак стал возводить в третью степень корень третьей степени из пяти и, конечно, получил пять:

$$(\sqrt[3]{5})^3 = 5.$$

Он долго стучал молотком, и каждый раз зажигалась зелёная лампочка.



Сева спросил у него, зачем он зря тратит время. Чудак неодобрительно хмыкнул:

— Погостите у нас — узнаете, что без этого иной раз не проживёшь.

Наконец он устал и отошёл в сторону. А молоток взяла крохотная буковка Вэ — v. Она возвела в квадрат число 41. Гирька взлетела высоко-высоко, к числу 1 681, и зажглась зелёная лампочка. Малютка Вэ запрыгала от радости: ничего, мол, что росточком не вышла, зато гирьку вон куда забросила!

Подошла очередь Севы.

— Дайте-ка мне возвести в квадрат отрицательное число. Возведу, а потом загляну в колодец. Только гирьки, пожалуй, там и не увидишь. Ведь чем больше число, тем глубже она уходит в колодец. А я возьму число не маленькое. Ну, хотя бы минус сорок один. Насколько я понимаю, минус сорок один в квадрате равно минус тысяче шестистам восьмидесяти одному.

Кругом зашептались. Сева стукнул молотком, гирька ушла вниз. Мы заглянули в колодец: где-то там, в тёмной глубине, зажглась красная лампочка.

— В чём дело? — всполошился Сева. — Что-нибудь не так?

— Конечно, — пропищала крошка Вэ, — вы забыли переменить знак. Ведь отрицательное число, возведённое в квадрат, становится положительным.

Сева схватился за голову.

— Какой же я осёл! Ведь возвести в квадрат — значит помножить число само на себя! А минус на минус даёт плюс *1.

Он отошёл, уступив место Тане.

Она возвела в квадрат минус три. Получилось плюс девять. Гирька подскочила, и загорелся зелёный огонёк. Потом Таня возвела минус три в третью степень. Получилось минус двадцать семь. Гирька ушла в колодец, и там снова вспыхнула зелёная лампочка *2.

— Дай-ка мне!

Я взял у Тани молоток и стал возводить минус три в четвёртую степень, пятую, шестую, седьмую...

Гирька по очереди то подпрыгивала всё выше и выше, то уходила всё глубже в колодец. И каждый раз загорался зелёный огонёк. Тут-то я и понял, что, когда отрицательное число возводишь в чётную степень, ответ получается положительный, а когда в нечётную — отрицательный. Хочешь знать почему? Возьми карандаш и разберись сам *3.

Наконец мы решили, что достаточно углубили свои знания в колодце, и отправились дальше.

По дороге нам повстречалась старая знакомая — та самая Мнимая Единичка, которая спрашивала у автомата, найдётся ли ей место в жизни. Мы её сразу узнали по маленькому красному зонтику.

— Здравствуйте, как поживаете?

— Отлично, — ответила она. — Автомат сказал правду: и Мнимая Единица может на что-нибудь пригодиться.

— Неужели вы нашли себе место на воздушной монорельсовой дороге?

— Конечно, но не на той ветке, где живут действительные числа. У нас, Мнимых Единиц, собственная дорога. Она пересекает воздушную монорельсовую как раз на Нулевой станции.

— Как же мы её не заметили? — спросил Сева.

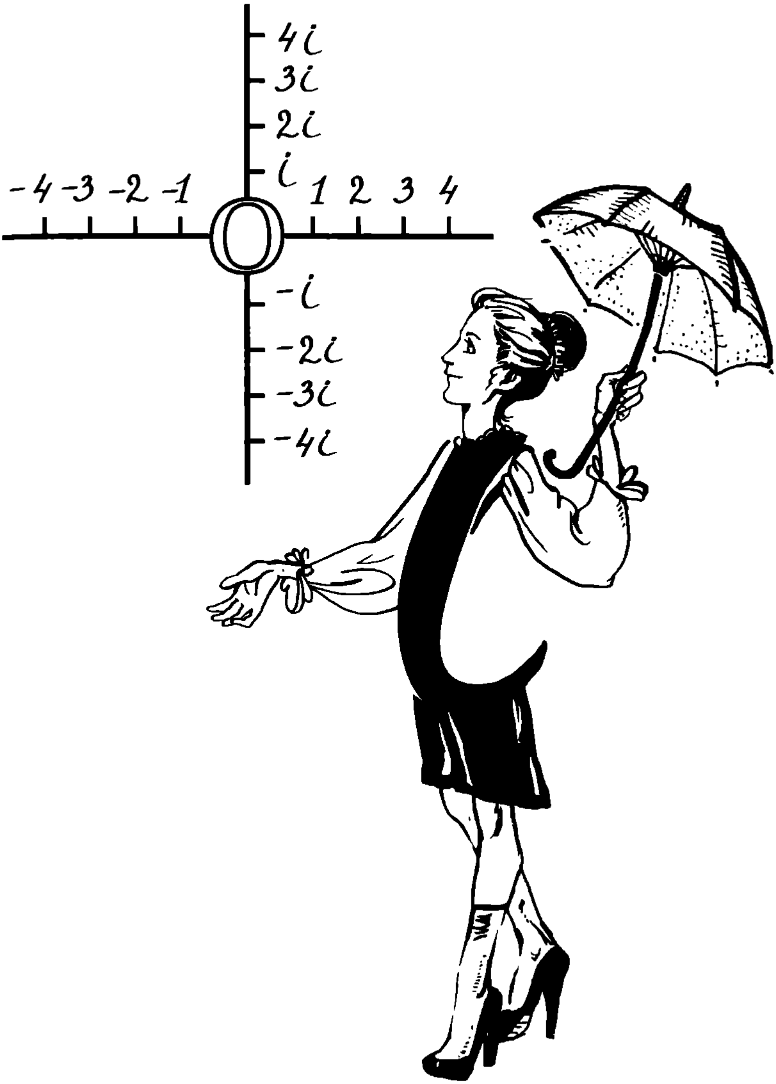
— Так ведь наша дорога мнимая и не сразу бросается в глаза.

— Жаль, что не сразу! — сердито отрезал Сева. — Теперь придётся возвращаться, чтобы посмотреть на неё.

— Возвращаться к старому иногда полезно, — заметила Мнимая Единичка. — Но с небольшим кусочком мнимой дороги вы можете познакомиться и здесь. В парке построен новый аттракцион. Он называется «Мнимая карусель». Я там работаю. Хотите взглянуть?

Хотим ли мы взглянуть на карусель, да ещё мнимую? Как ты думаешь?

Олег.


4i
3i
2i
i
-4 -3 -2 -1
0
1 2 3 4
-i
-2i
-3i
-4i

Комментарии

[*1] $$(-41)^2 = (-41) \cdot (-41) = 1\,681.$$

[*2] $$(-3)^3 = (-3) \cdot (-3) \cdot (-3) = 9 \cdot (-3) = -27.$$

[*3] Если показатель степени n — чётное число, то его можно записать в виде $n = 2k$ (например, $12 = 2 \cdot 6$). Тогда:

$$(-3)^n = (-3)^{2k} = ((-3)^2)^k = 9^k = (3^2)^k = 3^{2k} = 3^n.$$

Если же n — нечётное число, то его можно представить как $n = 2k + 1$ (например, $15 = 2 \cdot 7 + 1$). В этом случае:

$$\begin{gathered}(-3)^n = (-3)^{2k+1} = (-3)^{2k} \cdot (-3) = \\ = ((-3)^2)^k \cdot (-3) = 9^k \cdot (-3) = (3^2)^k \cdot (-3) = \\ = -3^{2k} \cdot 3 = -3^{2k+1} = -3^n.\end{gathered}$$

Мнимая Карусель

(Таня – Нулику)

Вот тебе, Нулик, наши последние новости.

По дороге к аттракциону всё чаще мелькали рекламные плакаты:

ПЕРВАЯ В МИРЕ МНИМАЯ КАРУСЕЛЬ!

Исключительно для Мнимых Единиц!

ЕДИНСТВЕННОЕ МЕСТО,

ГДЕ МНИМЫЕ ЕДИНИЦЫ МОГУТ СТАТЬ

ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫМИ!

Мнимые Единицы, кружитесь на здоровье!

Наша симпатичная подружка щебетала без умолку и рассказала кучу интересного.

Оказывается, Мнимая Единица – это просто-напросто корень квадратный из отрицательной единицы:

$$i = \sqrt{-1}.$$

– А разве из минус единицы нельзя извлечь корень? – спросил Сева. – Ведь корень квадратный из единицы всегда равен единице.

— Ой-ой-ой! — ужаснулась Мнимая Единичка. — Это касается только положительной единицы. Ведь что значит извлечь корень квадратный, скажем, из девяти?

— Это значит найти такое число, которое при возведении в квадрат равнялось бы девяти, — ответил Олег. — Это число три.

— Верно. А теперь попробуйте найти число, которое при возведении в квадрат даёт минус единицу! — Мнимая Единичка тоненько засмеялась.

Сева озадаченно взъерошил волосы:

— М-да! Такого числа нет. Какое число ни возводи в квадрат, положительное или отрицательное, ответ всё равно получится положительный. Уж я-то знаю!

— Вот видите. Потому-то корень квадратный из минус единицы называется мнимой единицей.

— Выходит, мнимые единицы — совсем особые числа. Наверное, и дорога у вас устроена как-нибудь особенно?

— Ничуть. Наша дорога очень похожа на ту, где живут действительные числа, только расположена она под прямым углом к ней. Это такая же бесконечная прямая, в центре которой находится всё та же Нулевая станция.

— Раз у вас есть Нулевая станция, значит, есть положительные и отрицательные числа?

— Что вы! Разве мнимые числа могут быть положительными и отрицательными? Просто на нашей дороге, так же как и на дороге действительных чисел, есть два направления от нуля. Одно из них условились обозначать знаком плюс, другое — знаком минус.

— Но как же мнимые числа отличают от действительных?

— С помощью буквы i:

$$2i,\ 5i,\ -8i,\ -12i.$$

— Вот как! У вас, как и у других букв в Аль-Джебре, тоже есть коэффициенты?

— Конечно.

— А где же ваш коэффициент? — ляпнул Сева.

И когда только он научится вести себя в обществе? Хорошо ещё, воспитанная Единичка сделала вид, что не заметила его бестактности.

— Мой коэффициент — единица, и он, как всегда, невидимка.

Но Сева уже закусил удила. Ужасный он спорщик!

— Вот вы говорите, что мнимая монорельсовая дорога похожа на действительную. Значит, и правила движения на ней те же. Так ведь? Тогда при чём здесь карусель? Ведь на обычной монорельсовой дороге движение идёт по прямой, а карусель-то кружится?

— Вы отчасти правы, — ответила Мнимая Единичка. — Правила движения у нас более разнообразны. При сложении и вычитании вагончики на мнимой дороге движутся по прямой и по тем же правилам, что и действительные числа:

$$2i + 3i = 5i;$$
$$8i - 15i = -7i,$$

или вот ещё:

$$-3i + 9i = 6i,$$

ну и конечно:

$$5i - 5i = 0.$$

Мнимые Единички с разными знаками и одинаковыми коэффициентами взаимоуничтожаются на Нулевой станции.

Иное дело — умножение, деление, возведение в степень... Тут уж Мнимые Единицы двигаются не только по прямой, но и по кривой. Именно это вы сейчас и увидите.

Мы вошли в круглый павильон. Там было полным-полно Мнимых Единиц. Все они с нетерпением ждали своей очереди покружиться.

Павильон очень похож на цирк. Места расположены амфитеатром. В центре — арена, её под прямым углом друг к другу пересекают две перекладины. Одна перекладина изображает монорельсовую дорогу действительных чисел. На концах её укреплены таблички $\boxed{+1}$ и $\boxed{-1}$. Другая перекладина изображает дорогу мнимых чисел. Здесь на концах находятся таблички $\boxed{+i}$ и $\boxed{-i}$. На пересечении дорог, в центре арены, — Нулевая станция. Здесь укреплена вращающаяся ось, и на неё (совсем как патефонная пластинка*[1]) надет прозрачный пластмассовый круг.

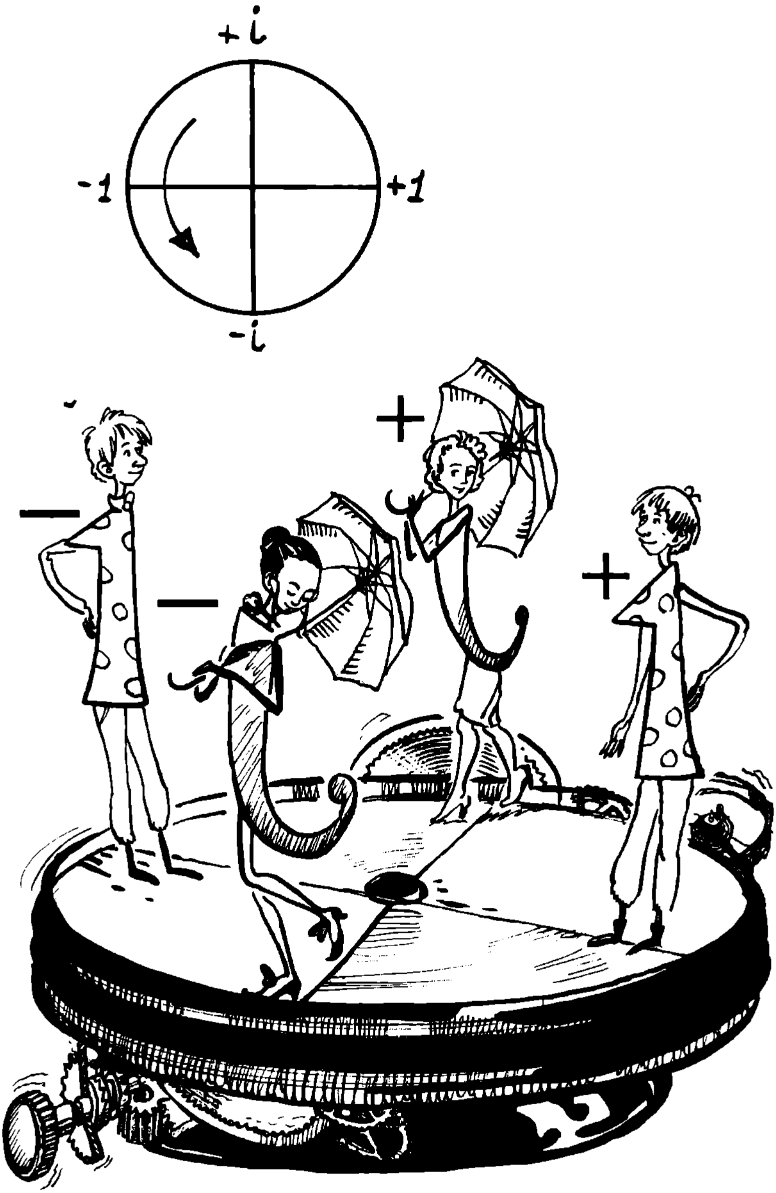
Когда мы вошли, карусель только что остановилась. С неё легко соскочила Мнимая Единица с зелёным зонтиком. Вместо неё на круг точно против таблички $\boxed{+i}$ стала Мнимая Единица с жёлтым зонтиком.

Наша спутница подошла к микрофону и скомандовала:

— К возведению в степень приготовиться!

Прозвенел звонок, и под звуки плавного вальса круг тронулся. Только не по часовой стрелке, а в обратную сторону. И тут-то начались необыкновенные вещи!

Мнимая Единица с жёлтым зонтиком пересекла дорогу действительных чисел у таблички $\boxed{-1}$ и превратилась в действительное число —


+i
-1
+1
-i
−
−
+
+

Отрицательную Единицу. Возле таблички $\boxed{-i}$ она снова стала Мнимой Единицей, но уже со знаком минус. Вот она снова пересекла действительную дорогу, поравнялась с табличкой $\boxed{+1}$ и — невероятно! — опять превратилась из Мнимой Единицы в Действительную, да ещё положительную. А потом как ни в чём не бывало возвратилась к табличке $\boxed{i}$. Тут она снова стала Мнимой.

Оркестр заиграл песню «Каким ты был, таким остался!», и всё началось сначала. Карусель кружилась, а Мнимая Единица всё превращалась и превращалась.

— Не понимаю, — сказал Сева. — Мнимая Единица превращается в Действительную, Действительная — опять в Мнимую... Как это?

— На то и возведение в степень! — отозвалась Мнимая Единичка. — Ведь Мнимая Единица равняется корню квадратному из минус единицы: $i = \sqrt{-1}$. Но если возвести в квадрат корень квадратный из любого числа, что получится?

— Подкоренное число, — ответил Олег.

— Так это же мы недавно видели! — вспомнил Сева. — Один карликан целый час возводил в квадрат то корень квадратный из трёх, то корень квадратный из двух... И каждый раз получалось число, стоящее под радикалом.

— То же самое происходит и с Мнимой Единицей:

$$i^2 = i \cdot i = (\sqrt{-1})^2 = -1.$$

— Ну, это понятно. А как же действительное число — минус единица — превращается в мнимое?

— При этом Мнимая Единица возводится уже не в квадрат, а в куб, то есть в третью степень:

$$i^3 = i^2 \cdot i.$$

А это ведь всё равно что умножить минус единицу на i:

$$-1 \cdot i = -i.$$

— Теперь, — сказал Олег, — нетрудно понять, как Мнимая Единица с минусом $\boxed{-i}$ превращается в Действительную Единицу со знаком плюс $\boxed{+1}$. Она возводится в четвёртую степень:

$$i^4 = i^2 \cdot i^2.$$

А это можно представить себе и так:

$$-1 \cdot -1 = +1.$$ *2

— Прекрасно! — воскликнула Мнимая Единичка. — Остаётся выяснить, как Действительная Единица снова становится Мнимой.

В самом деле, как? Тут даже Олег ни до чего не додумался. Но оказалось, что для этого Мнимую Единицу надо возвести в пятую степень.

— Не может быть! i^5 равно i?! — растерялись мы. — Что же это такое?

— Да ничего особенного: $i^4 = 1$. Чтобы получить i^5, умножим единицу на i. А это ведь всё равно что i, взятое один раз, то есть просто i:

$$1 \cdot i = i.$$

— Вот так история! Мнимую Единицу нельзя возвести более чем в четвёртую степень? — удивился Олег.

— Отчего же! — возразила Мнимая Единичка. — Возводите себе на здоровье и в шестую, и в седьмую, и в сто двадцать первую... Словом, в любую целую степень. Но ничего, кроме того, что уже было, не получится. На то и карусель!

Тут Севе срочно понадобилось выяснить, чему равняется i^{17}.

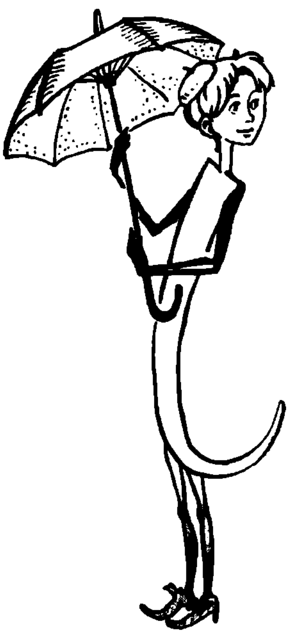
— Ну, это совсем нетрудно, i в пятой равно i, — сказала Мнимая Единичка. — Значит, i в девятой тоже равно i...

— Понимаю! — перебил Сева. — Каждый раз надо прибавлять к показателю степени четыре: i^{13} равно i, значит, i^{17} тоже равно i[*3].

Вот, Нулик, хорошая задача для твоих учеников. Попробуйте вычислить, чему равно i^{24}. А чтобы вам легче было, загляните в чертёж мнимой карусели[*4].

Долго ещё любовались мы превращениями Мнимых Единиц, а когда уже собрались уходить, Сева хлопнул себя по лбу:

— Чуть не забыл спросить! Вы сказали, что при возведении в степень Мнимые Единицы



движутся по кривой. А ведь здесь они движутся по окружности!

— Окружность тоже кривая, но такая, где все точки находятся на одинаковом расстоянии от центра. При умножении и возведении в степень перемещаются по окружности только Мнимые Единицы.

— А как движутся другие мнимые числа при возведении в степени? — спросил Олег. — Два i, три i, четыре i?

— На нашей карусели вы этого не увидите, — сказала Мнимая Единичка. — Да оно и к лучшему. Это очень сложный вопрос. Нельзя же всё сразу...

— Всякому овощу своё время? — подмигнул Сева.

— Пожалуй, — улыбнулась Мнимая Единичка.

Мы поблагодарили её и распрощались. Но тут пришла очередь Олегу хлопать себя по лбу.

— Извините, пожалуйста, — сказал он, обернувшись, — а зачем вообще нужны мнимые числа?

— Это вы поймёте, когда начнёте решать уравнения второй и третьей степени. Там в ответе часто получаются мнимые числа.

— На что нужны уравнения с мнимыми ответами? — буркнул Сева.

— Спросите об этом у физиков, химиков, инженеров, астрономов... Мнимые числа помогают им решать вовсе не мнимые, а действительно важные практические задачи.

— Но почему же тогда вас называют мнимыми?

— По привычке, — грустно ответила буковка *i*. — Так нас окрестил французский учёный Рене Декарт. Это было в семнадцатом веке, когда мнимые числа ни во что не ставились. Но с тех пор многое переменилось. Если бы Декарт жил в наши дни, он непременно придумал бы для нас более подходящее название.

— Например, «необходимые числа», — сказал Олег.

— О! Это было бы чудесно! — вздохнула Мнимая Единичка.

Мы ещё раз попрощались и ушли. На этот раз совсем.

Таня.

Комментарии

*1 *Патефонная пластинка*, а позже грампластинка, — носитель звуковой информации, который изготавливали в первой половине XX века из шеллака, а впоследствии из винила. Для воспроизведения грампластинок использовались специально предназначенные для этой цели аппараты: граммофоны и патефоны, в дальнейшем электропроигрыватели. В настоящее время грампластинки и проигрыватели практически вытеснены компакт-дисками.

*2 На современном математическом языке эта формула записывается так:

$$(-1) \cdot (-1) = +1.$$

*3

$$i^{17} = i^{16+1} = i^{16} \cdot i^1 = i^{4 \cdot 4} \cdot i = \\ = (i^4)^4 \cdot i = 1^4 \cdot i = 1 \cdot i = i.$$

*4 Вычислим i^n для произвольного n. Мы знаем, что $i^4 = 1$. Тогда:

$$i^8 = i^4 \cdot i^4 = (i^4)^2 = 1,$$

и

$$i^{12} = i^4 \cdot i^4 \cdot i^4 = (i^4)^3 = 1.$$

Точно так же, если число k делится на 4, то есть

$$k = 4q,$$

то:

$$i^k = i^{4q} = (i^4)^q = 1^q = 1.$$

Если мы хотим узнать значение i^n для некоторого числа n, то нужно поделить n на 4 с остатком:

$$n = 4q + r,$$

где остаток r может принимать одно из значений:

$$0,\ 1,\ 2,\ 3.$$

Тогда

$$i^n = i^{4q+r} = i^{4q} \cdot i^r = (i^4)^q \cdot i^r = 1 \cdot i^r = i^r.$$

То есть i^n совпадает с i^r, где число r — остаток от деления n на 4. Например

$$i^{359} = i^{356+3} = i^{4 \cdot 89 + 3} = i^{4 \cdot 89} \cdot i^3 =$$
$$= (i^4)^{89} \cdot i^3 = 1^{89} \cdot i^3 = 1 \cdot i^3 = i^3 = -i,$$

а

$$i^{24} = i^{4 \cdot 6} = (i^4)^6 = 1^6 = 1.$$

Аль-мука́бала!

(Сева – Нулику)

Селям алейкум, старина! Я теперь тоже умею говорить по-восточному. Поживёшь в Аль-Джебре — не то ещё узнаешь!

Сегодня мы учились решать уравнения. Правда, пока ещё первой степени. Но и это не так уж мало.

Здесь есть особая площадка, где решают эти уравнения. И не как-нибудь вручную, а подъёмными кранами. Механизация!

Когда подходишь к этой площадке, видишь одни только краны. Длинношеие, вроде жирафов. «Жирафы» то поднимают голову, то опускают, то тянутся друг другу навстречу. Только переносят они не кирпичи, не блоки, а буквы, числа, знаки сложения, вычитания. Словом, всё, что понадобится.

Таня оставила в покое свой фасонистый комбинезон, пришла в школьном платье. И очки сняла. Правильно сделала: электросваркой ей здесь заниматься не пришлось.

Что нам бросилось в глаза — это иксы. Их здесь видимо-невидимо. Ведь там, где решают уравнения, без иксов не обойтись.

Эф не отпускала нас ни на шаг. Наверное, боялась, как бы кого не ушибло краном, хотя везде и так развешаны плакаты:

ПОД КРАНОМ НЕ СТОЯТЬ!

Во время аль-джебры и аль-мукабалы к уравнениям не подходить!

Высоко-высоко, в кабинке крана, сидела молоденькая крановщица — буква Ка. Она передвигала рычаги и зорко следила за регулировщицей Эр. Та стояла внизу. В каждой руке — по флажку. Ими она указывала крановщице, куда двигать кран.

Под краном чинно стояли Икс в чёрной маске, Двойка и Шестёрка. Они образовали такое уравнение:

$$x - 2 = 6.$$

Регулировщица медленно опустила один флажок, и так же медленно наклонил свою жирафью шею кран с большим крюком на конце. Крюк осторожно подцепил Двойку, которая торопливо прихватила свой минус. Регулировщица помахала флажком, и кран замер. Потом она крикнула: «Аль-джебр!» — прямо как у нас кричат «майна» или «вира». И вот уже Двойка с минусом заболтала ножками в воздухе и поплыла к правой части уравнения.

Когда она поравнялась со знаком равенства, регулировщица скомандовала: «Переменить знак!» Двойка быстро положила минус в карман и вынула оттуда знак плюс. И вот уже она рядом с Шестёркой в правой части равенства:

$$x = 6 + 2.$$

А через секунду вместо этого мы увидели:

$$x = 8.$$

Чёрная маска упала, Икс поднял её, низко поклонился Ка и Эр и скрылся. А мы перешли к другому крану. Там уже стояло такое уравнение:

$$3x + 6 = 12.$$

Снова крановщица нажимала на рычаги, снова регулировщица махала флажками, кричала: «Аль-джебр!» — и скоро под краном появилось вот что:

$$3x = 12 - 6.$$

Мы переглянулись.

— В чём дело? — спросила Эф. — Что-нибудь непонятно?

— Непонятно, — признался Олег. — До сих пор нам показывали только такие задачи, где отрицательное число переносится из левой части равенства в правую и превращается в положительное. Действие это называется «аль-джебр», по-нашему — восстановление. На этот раз в левой части равенства было положительное число шесть, и его перенесли в правую часть со знаком минус. При чём же здесь восстановление?

— Законный вопрос, — развела руками Эф. — Но вспомните, что «аль-джебр» — слово, пришедшее к нам из далёкой древности. А древние слова по дороге часто теряют своё первоначальное значение. Взять хоть слово «чернила». Поначалу чернила были только чёрные. Сейчас есть и красные, и зелёные, и синие, и фиолетовые. Но никто же не называет их ни краснилами, ни синилами!

— Как интересно! — сказала Таня. — Таких слов, наверное, много.

— Перочинный ножик! — вспомнил я. — Раньше им перья чинили, а теперь карандаши.

— Правильно! — сказала Эф. — То же самое случилось и со словом «аль-джебр». Мухаммед ибн Муса применил его тогда, когда отрицательные числа были бесправными. Перенося их в правую часть равенства с положительным знаком, он восстанавливал их в правах. Но отношение к отрицательным числам давно уже переменилось. И теперь понятие «аль-джебр» расширилось. Оно означает не только перенос отрицательного числа из одной части равенства в другую с положительным знаком, но и вообще перенос любого числа с обратным знаком. Но вернёмся всё-таки к нашему уравнению, — закончила свою речь Эф.

Мы посмотрели на площадку. Там теперь вместо $3x = 12 - 6$ стояло:

$$3x = 6.$$

Странное дело: уравнение решено, а на Иксе по-прежнему чёрная маска.

— Ошибаетесь, — сказала Эф. — Решить уравнение — значит вычислить, чему равен один икс. Мы же пока знаем, чему равны три икса.

— Ну, это нетрудно, — сказал Олег. — Чтобы вычислить икс, надо шесть разделить на три.

И словно в ответ на его слова, кран приподнял число Шесть над землёй и плавно опустил на двухэтажную тележку. Потом крюк подцепил коэффициент при Иксе — Тройку, перенёс её в правую часть равенства и поставил под числом Шесть:

$$x = \frac{6}{3}.$$

Тележку быстро откатили, и на месте дроби появилась Двойка:

$$x = 2.$$

— Э-э, нет, — запротестовал я, — так не годится. Ведь числа переносятся в правую часть равенства с обратным знаком. Почему же это Тройку перенесли с тем же?

— Да потому, что в этом уравнении Тройка — не слагаемое, а коэффициент при Иксе. А коэффициент — это множитель, не так ли? Коли три в левой части множитель, так в правой оно превращается в делитель. Стало быть, правило сохранилось, потому что деление и умножение — такие же обратные действия, как сложение и вычитание.

Не удаётся мне их подловить на ошибке. Пришлось прикусить язык и вместе со всеми перейти к следующему уравнению. Его решал уже не один, а два крана. В каждом сидела крановщица. А регулировщица, как и прежде, была всего одна. Наверное, многостаночница.

Уравнение было такое:

$$6x - 7 = 2x + 8 - x.$$

На этот раз регулировщица дала команду подлиннее: «Аль-джебр! Аль-мукабала!» И сейчас

же один кран подцепил все иксы справа вместе с коэффициентами и перенёс с обратными знаками в левую часть уравнения. В то же время второй кран подхватил Семёрку с минусом и перенёс в правую часть. При этом Семёрка тоже переменила знак минус на плюс:

$$6x - 2x + x = 8 + 7.$$

Потом регулировщица (точь-в-точь как Главный Весовщик) скомандовала: «Подобные, приведитесь!» — и вместо прежнего выражения перед нами очутилось новое:

$$5x = 15.$$

Что было дальше, ты, уж наверное, сам догадался. Под краном появилось:

$$x = 3,$$

и чёрная маска упала.

— Скажите, — спросила Таня, — почему это в первый раз регулировщица кричала только «аль-джебр», а теперь прибавила какую-то аль-кула... альбума...

— Аль-мукабалу, — подсказала Эф.

— Да, да, аль-мукабалу!

— Так ведь это и есть противопоставление. То самое действие, о котором не успел рассказать Главный Весовщик.

— Что же здесь противопоставляется?

— Неизвестные — известным. Все иксы переносятся в левую часть уравнения, все свободные числа — в правую.

И тут мне невтерпёж стало. Восстановление, противопоставление... А где же составление? Когда мы до него доберёмся?

И в эту минуту Эф сказала:

— Ну, теперь, пожалуй, можно бы перейти к составлению уравнений...

— Ура! — выпалил я.

Эф посмотрела на меня хитрыми глазами:

— А может, всё-таки решить ещё одно?

Я даже зубами заскрипел: издевается она надо мной, что ли? Но сдержался. Если хочешь научиться терпению, приезжай в Аль-Джебру, Нулик. Здесь из тебя сделают человека.

И мы пошли решать новое уравнение. Оно было какое-то чудно́е:

$$4ax - 7c = b + c - 2ax.$$

— Ты что-нибудь понимаешь? — спросил я у Тани вполголоса.

Зря спрашивал. Разве она сознается?

— Вас, наверное, смущает выражение $4ax$? — сказала Эф. — Ничего особенного в нём нет. Икс — неизвестное, $4a$ — коэффициент при Иксе. Ведь под a можно подразумевать любое число. Скажем, семь. Тогда числовой коэффициент при Иксе равен:

$$4 \cdot 7 = 28.$$

Вот и вся премудрость.

И опять регулировщица скомандовала: «Аль-джебр! Аль-мукабала!» — задвигались краны, и мы увидели вот что:

$$4ax + 2ax = b + c + 7c.$$

Потом она закричала: «Подобные, приведитесь!» — и вместо прежнего выражения появилось новое:

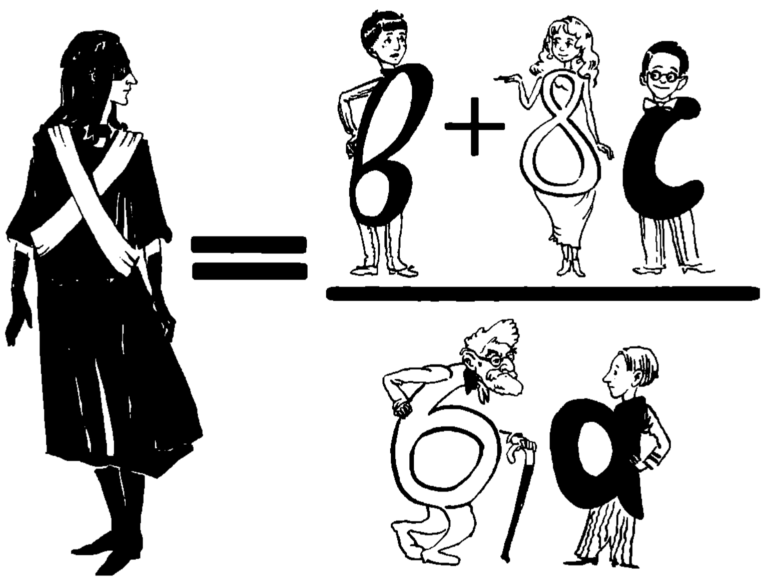
$$6ax = b + 8c.$$

Мы с интересом ждали, что дальше? И дождались:

$$x = \frac{b + 8c}{6a}.$$

— Дудки! — сказал я. — Какое же это решение? Маска с Икса нипочём не свалится.

Но маска всё-таки свалилась.



— Вы привыкли, что Икс равен числу, — улыбнулась Эф. — Но не забывайте, где вы находитесь. Ведь главный девиз Аль-Джебры...

— Упрощение и обобщение! — сказали мы хором.

— Правильно. Вот в этом решении и собраны все возможные ответы при любых числовых значениях a, b и c. Замените буквы какими угодно числами, и вы убедитесь, что я права.

Вот когда я наподставлялся в своё удовольствие! Это было так здорово, что ребята чуть не силком оттащили меня от этого занятия.

Мы пошли дальше. По дороге Таня всё время ворчала:

— Несуразный ты человек! То покоя не давал — торопился составлять уравнения, а теперь, когда уже можно составлять, тебя отсюда калачом не выманишь!

Я, конечно, мог бы ей ответить как следует, но промолчал. Мужчина я или кто?

Сева.

У ЦЕЛИ

(Олег – Нулику)

Да, Нулик, вот мы и у цели.

Эф привела нас на то самое место, где вырос и тут же разрушился воздушный замок. Помнишь, он нам ещё так понравился?

— Теперь, — сказала Эф, — пора вам составлять уравнения. Подходите к любому Составителю. Каждый научит вас чему-нибудь новому. Здесь составляются уравнения на все случаи жизни.

Ну и дела! Без уравнений теперь «и ни туды и ни сюды». Задумал построить мост — составляй уравнения, хочешь запустить космический корабль — составляй уравнения. И для атомного реактора, и для нефтяной скважины, и даже для того, чтобы сшить на фабрике ботинки, — для всего нужно сперва составить уравнения, решить их и только тогда приступать к делу. Это уж точно.

Мы тут наблюдали за многими Составителями. Чтобы написать про всех, надо гору бумаги. Поэтому я расскажу тебе о двух-трёх. На первый раз хватит.

Кроме Составителей, на этом строительстве много практикантов вроде нас.

Они тоже ещё только учатся и потому часто попадают впросак. Но Составители на них не сердятся, а терпеливо разъясняют ошибки.

Один практикант строил стену из кирпичей. Положит несколько рядов, рассыплет и опять начнёт. Мы слышали, как он сам с собой разговаривал:

— Так и через десять лет не построишь! Ну и задачка!

— Что это вы делаете? — спросила Таня.

— Стену строю, — вздохнул тот, — да вот ничего не получается.

— Наверное, потому, что вы не кладёте цемента, — догадался Сева.

— Нет, цемент тут ни при чём.

Он протянул нам листок, где была написана такая задача: «Построить стену высотой в пять кирпичей так, чтобы в каждом следующем ряду было на два кирпича меньше, чем в предыдущем. При этом надо использовать 145 кирпичей».

— Разве это так трудно? — удивились мы.

— Ещё бы! Ведь здесь не сказано, сколько кирпичей надо уложить в первом ряду. А без этого у меня ничего не получается. Положил 30 кирпичей. Тогда во втором надо уложить 28, в третьем — 26, в четвёртом — 24, в пятом — 22. А 15 кирпичей остаётся! Попробовал положить в первый ряд 35 кирпичей, во второй — 33 и так далее. На пятый ряд кирпичей уже не хватило.

— Дайте-ка мне попробовать! — попросил Сева.

Он положил в первый ряд 34 кирпича, во второй — 32... Дошёл до пятого — опять не хватило!

— Не угадаешь!

— А тут гадать не надо, — сказал незнакомый голос.

Это к нам подошёл Составитель Уравнений Тэ. Мы познакомились.

— Чем гадать, — продолжал он, — лучше составить уравнение. Обозначим неизвестное число кирпичей в первом ряду буквой икс. Сколько же в таком случае их будет во втором ряду, если там должно быть на два кирпича меньше, чем в первом?

— Конечно, $x - 2$, — сообразила Таня.

— Правильно. Тогда в следующем ряду будет $x - 4$, затем $x - 6$ и, наконец, в последнем, пятом ряду $x - 8$ кирпичей. Сколько же всего пойдёт кирпичей на строительство?

— Сумма всех этих чисел, — подсказал Сева, —

$$x + (x - 2) + (x - 4) + (x - 6) + (x - 8).$$

— Верно. А так как всё это вместе по условию равно ста сорока пяти, получим уравнение:

$$x + x - 2 + x - 4 + x - 6 + x - 8 = 145.$$

— Ну, теперь уж просто, — отмахнулся Сева. — Остаётся сказать: «Аль-джебр! Аль-мукабала!» Одна минута, и бульон готов!

— Нет, — возразил Составитель, — не готов! Вы забыли привести подобные члены в левой части уравнения.

Привели подобные. Получилось:

$$5x - 20 = 145.$$

— Вот теперь и в самом деле можно приступить к восстановлению.

Перенесли число минус 20 в правую сторону с обратным знаком. Вышло, что $5x = 165$, а $x = 33$.

Я забыл тебе сказать, что составляли и решали уравнение мы не на бумаге: нам помогали живые буквы и цифры. А как только уравнение было решено, расколдованный Икс помахал нам своей маской и убежал. Мы стали проверять ответ и построили стену. И всё оказалось правильно:

$$33 + 31 + 29 + 27 + 25 = 145.$$

Потом мы увидели того самого карликана, который собирался рыть котлован для фундамента. Он стоял возле одного Составителя, и они решали его задачу. Мы подошли и стали помогать. Это уравнение оказалось посложней первого.

— Итак, — сказал Составитель, — у вас три экскаватора. Первый может вырыть котлован за четыре часа, второй — за три, третий — за двенадцать. Неважный, наверное, экскаватор. Вы хотите, чтобы все три работали одновременно. Конечно, так они выроют котлован быстрее. Но за какое время? Составим уравнение. Что примем за икс?

— Время, за которое все три экскаватора выроют весь котлован, — предложил я.

— Верно. Давайте дальше.

Тут я, как назло, запнулся. Ни туда ни сюда.

— Ладно уж, — сказал Составитель, — придётся помочь. Выясним, какую часть котлована выроет каждый экскаватор за один час? Для этого условимся, что объём всего котлована равен единице.

— И что из этого следует? — спросил Сева.

— А из этого следует, — догадался я, — что первый экскаватор за час выроет одну четверть котлована, второй — одну треть, третий — одну двенадцатую.

— Ну конечно! — обрадовался Составитель. — Какую же часть они выроют за час, если будут работать все вместе?

На этот раз ответил Сева:

— Вот какую:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}.$$

— Молодец! А за икс часов?

— А за икс часов они выроют в икс раз больше, — сказала Таня. — Это и будет весь котлован, объём которого мы приняли за единицу.

Так у нас получилось уравнение:

$$x\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{1}{12}\right) = 1.$$

Ну, а решить такое уравнение было уже совсем легко:

$$\frac{8}{12}x = 1.$$

Значит, Икс равен двенадцати восьмым, или

$$x = \frac{3}{2}.$$

Выходит, что три экскаватора, работая вместе, выроют котлован за полтора часа.

Неловко об этом говорить, но мне было очень приятно, когда маска с Икса упала и он стал нас благодарить.

Карликан заторопился к своим экскаваторам, а Составитель тут же предложил решить ещё одну задачу, точно такую же, но... Что это за «но», ты сейчас поймёшь.

— Признаться, надоели мне такие уравнения, — сказал Составитель, — слишком часто приходится их составлять. Везде идут стройки, везде роют котлованы. Пора бы уж сразу найти один ответ на все подобные вопросы. Ведь мы как-никак живём в Аль-Джебре...

— И потому должны упрощать и обобщать, — докончил Сева.

— Уж конечно! Не хотите ли вместе со мной вывести такое единое решение?

Мы молча кивнули, и Составитель начал:

— Так как экскаваторы бывают разных мощностей, то пусть первый из них роет котлован за a часов, второй — за b часов, ну а третий, допустим, за c часов. Спрашивается, за сколько часов выроют они котлован, если будут работать вместе?

— По-моему, — сказал я, — решение должно быть таким же, как и в предыдущей задаче. Только та задача была в числах, а мы её изобразим буквами. Снова примем за Икс число часов, необходимое, чтобы закончить работу, а всю работу — за единицу.

— Так-так-так, — подбадривал Составитель.

Теперь рассуждала Таня:

— Очевидно, первый экскаватор совершит за час $\frac{1}{a}$ часть работы. Это, наверное, читается так: одну атую часть работы?

— Хорошо, хорошо.

— Тогда второй, — сказал Сева, — за час совершит одну бэтую: $\frac{1}{b}$, а третий — одну цэтую: $\frac{1}{c}$ часть работы. А все вместе они выроют за час сумму этих дробей:

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}.$$

Теперь нетрудно составить уравнение, ведь за икс часов они выполняют работу в икс раз большую:

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right).$$

И всё это должно быть равно единице:

$$x\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=1.$$

— Вот вы и составили уравнение, — похвалил Составитель.

— Теперь приведём подобные, — сказал Сева. Вспомнил, наверное, как он недавно оплошал.

— Нет, — возразил Составитель, — здесь я не вижу никаких подобных. Просто надо сложить три дроби, которые стоят в скобках. Для этого приведём их к общему знаменателю и введём дополнительные множители у каждой дроби.

— Это мы знаем, — вмешалась Таня и тут же написала:

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{bc}{abc}+\frac{ac}{abc}+\frac{ab}{abc}=\frac{bc+ac+ab}{abc},$$

или

$$x\,\frac{bc+ac+ab}{abc}=1.$$

— Вот какой огромный коэффициент оказался у Икса! — заметил Сева. — С таким провожатым ничего не страшно.

— Что же остаётся сделать, чтобы найти Икс? — спросил Составитель.

— Разделить правую часть уравнения — единицу — на этот коэффициент, — ответила Таня.

$$x = 1 : \frac{bc + ac + ab}{abc}.$$

С этим она справилась быстро:

$$x = \frac{abc}{bc + ac + ab}.$$

Икс подошёл к Тане и поклонился, помахав вместо шляпы чёрной маской. Д'Артаньян, да и только!

— Вот вам и уравнение, пригодное для любых трёх экскаваторов, — сказал напоследок Составитель. — Может быть, хотите проверить?

Тут уж пришёл на Севину улицу праздник. Подставлять — его любимое занятие. Вместо a, b и c он подставил числа из предыдущей задачи — 4, 3 и 12:

$$x = \frac{4 \cdot 3 \cdot 12}{3 \cdot 12 + 4 \cdot 12 + 4 \cdot 3} = \frac{144}{96}.$$

Сократил дробь и получил:

$$x = \frac{3}{2}.$$

— Упрощение и обобщение! Упрощение и обобщение! — приговаривал он, похлопывая себя по животу, словно только что съел что-нибудь вкусное.

Потом он придумал другие числа, и опять другие. И каждый раз, вычислив Икс, выкрикивал те же слова и снова хлопал себя по животу. Забыл он, что ли, что теперь в самый раз разобраться в задаче зелёного стручка и попробовать составить уравнение самим?! Пришлось обратиться к талисману. В последнее время он что-то совсем притих — лежит себе в кармане и помалкивает. Видно, не считает нужным вмешиваться. Я вынул его и поднёс к самому Севиному носу. Увидев стручок, Сева снова хлопнул себя — на этот раз по лбу, — и через несколько минут мы уже сидели на скамейке в Парке Науки и Отдыха.

Ну вот и всё пока. Наберись терпения и подожди следующего письма. Так всегда делают в журналах — прерывают рассказ на самом интересном месте и пишут: «Продолжение следует».

Олег.

Пончик на крючке

(Нулик — отряду РВТ)

Дорогие ребята! Вся наша школа страшно волнуется. Как-то вы раскроете тайну Чёрной Маски? Но больше всех переживаю я: может быть, сейчас вы уже расколдовываете моего незнакомца. Когда чего-нибудь ждёшь, время тянется ужасно медленно. Прямо не знаешь, куда деваться. Вот мы и решили обмануть время и чем-нибудь заняться.

А так как на уме у нас только составление уравнений, мы захотели сами придумать какую-нибудь задачу.

Эту мысль нам подсказал Пончик. Я с ним очень подружился. Не могу даже подумать, что скоро нам придётся расстаться!

Так вот, я заметил, что путь в Аль-Джебру и обратно занимает у Пончика всё больше времени. Каждый раз он всё дольше задерживается в дороге с письмами. Наверное, потому, подумал я, что вы постоянно продвигаетесь вперёд. Последний раз Пончик вернулся только через тридцать четыре часа.

Мы решили выяснить, как далеко вы ушли. Расставили наблюдателей с часами, и они посчитали, что Пончик мчится прямо-таки с космической скоростью: двенадцать километров в час!

Потом мы стали думать, сколько времени он проводит у вас в Аль-Джебре. Наверное, столько же, сколько и у нас. Минут сорок.

Теперь слушайте, как мы составили уравнение.

Во-первых, что мы ищем? Мы ищем расстояние. Его-то и приняли за икс. А так как Пончик бежит со скоростью двенадцать километров в час, то на путь к вам он затратит $\frac{x}{12}$ часов, или $\frac{1}{12}x$ часов. Стало быть, на два конца уйдёт вдвое больше времени, то есть $\frac{2}{12}x$ часов.

Прибавим к этому 40 минут, которые Пончик пробудет в Аль-Джебре. Получится:

$$\frac{2}{12}x + 40.$$

Вот сколько часов займёт всё его путешествие.

— Ерунда какая-то, — сказал один Нулик. — Прежде считали в часах, а потом прибавили 40 минут. Так нельзя. Выбирайте что-нибудь одно: либо часы, либо минуты.

Пришлось поставить вопрос на голосование. Большинство было за то, чтобы превратить минуты в часы.

В часе 60 минут. Значит, 40 минут — это $\frac{2}{3}$ часа. Подставили дробь в наше выражение:

$$\frac{2}{12}x + \frac{2}{3}.$$

Так мы записали, сколько времени путешествовал Пончик. А путешествовал он, как известно, 34 часа. Вот и получилось уравнение:

$$\frac{2}{12}x + \frac{2}{3} = 34.$$

Теперь надо было его решить. Вроде дело нехитрое: бери карандаш, бумагу и решай на здоровье! Но нас это не устраивало. Мы непременно хотели решать, как в Аль-Джебре. Подъёмным краном. Для этого у нас было всё — и крановщики, и регулировщики. Не хватало только крана. Тут все приуныли. Но я всё-таки нашёл. Не кран, конечно, а большую удочку с леской и крючком. При желании она вполне сойдёт за подъёмный кран.

Ну, все опять повеселели и стали вырезать из картона цифры и букву икс. А потом сделали для этого картонного Икса маску из чёрной бумаги.

Когда всё было готово, Нулик-Регулировщик взмахнул флажком, а я взял удочку и скомандовал:

— Аль-джебр! Аль-мукабала!

Подцепил на крючок дробь $\frac{2}{3}$ и перенёс её вправо со знаком минус. Получилось:

$$\frac{2}{12}x = 34 - \frac{2}{3}.$$

Привели правую часть к общему знаменателю. После вычитания получилось вот что:

$$\frac{2}{12}x = \frac{100}{3}.$$

Потом я поддел на крючок коэффициент при иксе $\frac{2}{12}$, перенёс его в правую сторону и разделил на него $\frac{100}{3}$.

$$x = \frac{100}{3} : \frac{2}{12} = 200.$$

Ой-ой-ой! Неужели вы уже так далеко ушли от меня? На двести километров! Мне даже грустно стало.

В это самое время появился Пончик. Все бросились к нему, чтобы скорее прочитать ваше письмо. Но на этот раз письма не было. Сначала мы расстроились, а потом надумали снова решить уравнение, только не с бумажным, а с живым Иксом.

Роль Икса поручили Пончику. Надели на него чёрную маску, обвязали клетчатым шарфом и сделали бантик на спине. Пончик отчаянно визжал и вырывался. Мне очень хотелось его выпустить, но наука прежде всего!

Я крикнул: «Аль-джебр! Аль-мукабала!» — зацепил крючком шарф и стал поднимать Пончика удочкой. Как раз в это время прибежала моя мама. Она сейчас же развязала собаку, отобрала удочку и посмотрела на меня сердитыми глазами.

— Вот когда я тебя снова узнаю́! — сказала она. А потом улыбнулась и прибавила: — А может, это к лучшему?

Так закончилось наше приключение с подъёмным краном.

С нетерпением ждём ваших сообщений. Ни пуха ни пера!

Нулик-Крановщик.

ТАЙНА РАСКРЫТА!

(Таня – Нулику)

Исполнилось наше желание, Нулик! Мы пошли в парк, уселись на скамью и первый раз в жизни сами составили уравнение.

Конечно, это было нелегко. Пришлось-таки поломать голову. Начали с того, что внимательно перечитали задачу зелёного стручка. Не мешает вспомнить её и тебе:

«Сколько было у меня горошин, если Нулик сперва съел одну треть их, затем прихватил не то две, не то четыре горошины, половину остатка я потерял, а Нулик вернул мне половину того, что он прихватил; потом две горошины я подарил, а последнюю унёс ветер? Стручок».

Сперва мне показалось, что задача очень трудная и нам её ни за что не решить. Ну да ведь рядом Олег! С таким не пропадёшь. Успокоит, подбодрит. Глядишь – всё и вышло.

– Что ж, – сказал он, – начнём рассуждать. Сперва выясним, что у нас неизвестное.

– Число горошин в стручке.

– Верно. Вот и обозначим это число через икс.

Олег вынул бумагу и приготовился записывать. Но его перебил Сева.

– Смотрите, смотрите! – закричал он вдруг.

Несносный мальчишка! Вечно глазеет по сторонам. Я повернулась, чтобы отчитать его хорошенько, и обомлела: по аллее чинно выступала дружная парочка — белый как снег Пончик и Чёрная Маска. Глядя на них, никто не сказал бы, что недавно они были совсем в других отношениях.

Икс подошёл к скамеечке и застенчиво поклонился. Он был такой смирный и воспитанный! Сева даже засомневался: а вдруг это опять не наш?

Но это был наш Икс. Икс из нашего уравнения. Вот он стоит и ждёт, когда его наконец расколдуют. И мы принялись расколдовывать.

Обозначили число горошин через икс. Одну треть их съел Нулик. Стало быть, он слопал $\frac{1}{3}x$. Потом он прихватил ещё несколько горошин — не то две, не то четыре.

— Будем считать, что Нулик прихватил две горошины, — сказал Сева.

— А если четыре?

— Значит, придётся решать задачу два раза.

— Но тогда получатся два разных ответа, — не соглашалась я.

Как всегда, нас помирил Олег:

— К чему спорить? Лучше вспомним, как в таких случаях поступают в Аль-Джебре.

Обозначим число прихваченных Нуликом горошин буквой a.

Отличная идея! Ведь под буквой можно подразумевать любое число, — значит, и два, и четыре.

— Итак, — продолжал Олег, — Нулику досталось $\frac{1}{3}x + a$ горошин. Поехали дальше. Здесь сказано: «Половину остатка я потерял».

— Сколько же осталось, когда Нулик ушёл? — спросил Сева.

— Ну, если всего горошин было x, то осталось $x - \frac{1}{3}x - a$ горошин, — сосчитала я.

— Или $\frac{2}{3}x - a$, — уточнил Сева.

— А так как стручок потерял половину этого остатка, — рассудил Олег, — выходит, что потеряно было

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - a\right).$$

— Теперь уже из стручка исчезло

$$\frac{1}{3}x + a + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - a\right) \text{ горошин.}$$

— Смотрите-ка, — заметил Сева, — оказывается, Нулик вернул половину того, что прихватил. А это не то одна, не то две горошины.

— А раз он прихватил a горошин, то и вернул $\frac{1}{2}a$, — сообразил Олег.

— Значит, число исчезнувших горошин стало меньше на $\frac{1}{2}a$, — сказала я:

$$\frac{1}{3}x + a + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - a\right) - \frac{1}{2}a.$$

— И наконец, две горошины стручок подарил, а последнюю унёс ветер, — сказал Сева. — Считайте, что исчезло ещё 3 горошины.

Тогда мы написали, сколько всего исчезло горошин из стручка:

$$\frac{1}{3}x + a + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - a\right) - \frac{1}{2}a + 3.$$

— Всё это прекрасно, но уравнения я ещё не вижу, — вздохнул Сева.

— Отчего же? — удивился Олег. — Ведь ветер унёс последнюю горошину. Поэтому то, что мы написали, и есть число всех горошин, которые были в стручке.

— Ага! — повеселел Сева. — Их-то мы обозначили через x.

— Тогда

$$x = \frac{1}{3}x + a + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{3}x - a\right) - \frac{1}{2}a + 3,$$

и уравнение составлено! — закончил Олег.

Мы смотрели друг на друга и глупо улыбались. Сева вдруг запел басом: «Ещё одно, последнее, сказанье, и летопись окончена моя». Сумасшедший!

Мы с Олегом опасливо оглянулись. Но что это? Отовсюду за нами наблюдали внимательные, сочувственные глаза. Ба! Да здесь целая толпа знакомых. Вот милые, улыбающиеся лица мамы Двойки и её близнецов. Вот важный Дэ. Пришли сюда и наша недавняя провожатая Эф, и фокусник, и Главный Весовщик, и Составители Уравнений, и директор кафе «Абракадабра». Даже скромная Мнимая Единичка покинула на время свою карусель.

— Что случилось? — растерянно спросил Сева.

— Не удивляйтесь, — ответила мама Двойка. — С тех самых пор, как вы появились в Аль-Джебре, мы следим за каждым вашим шагом. Нам так хочется, чтобы вы полюбили нашу страну и чтобы пребывание в ней сделало вас сильнее и богаче!

— Спасибо вам, дорогие друзья! — растроганно сказал Олег. — Без вас мы никогда не составили бы уравнения, никогда не раскрыли бы тайны Чёрной Маски...

Смирно стоявший в сторонке Икс осторожно потянул его за рукав.

— Не забывайте, что тайна ещё не раскрыта, — шепнул он, указывая на свою маску.

В самом деле! Составив уравнение, мы на радостях позабыли его решить.

— Ну, это уж пустяки, — отмахнулся Сева. — Сперва раскроем скобки...

Раскрыли. Получилось:

$$x = \frac{1}{3}x + a + \frac{1}{3}x - \frac{1}{2}a - \frac{1}{2}a + 3.$$

— А теперь, — скомандовала я, — подобные в правой части уравнения, приведитесь!

Подобные привелись. И вышло из этого вот что:

$$x = \frac{2}{3}x + 3.$$

— Полюбуйтесь-ка, все a исчезли! Куда это они?

Олег посмотрел на Севу укоризненно:

— А ты подумай! У нас было a с плюсом и две половинки a с минусами. Но это всё равно что целое a с минусом. Вот они и взаимоуничтожились. Понял? Тогда продолжаем. Что будем делать сейчас?

У Севы даже глаза заблестели.

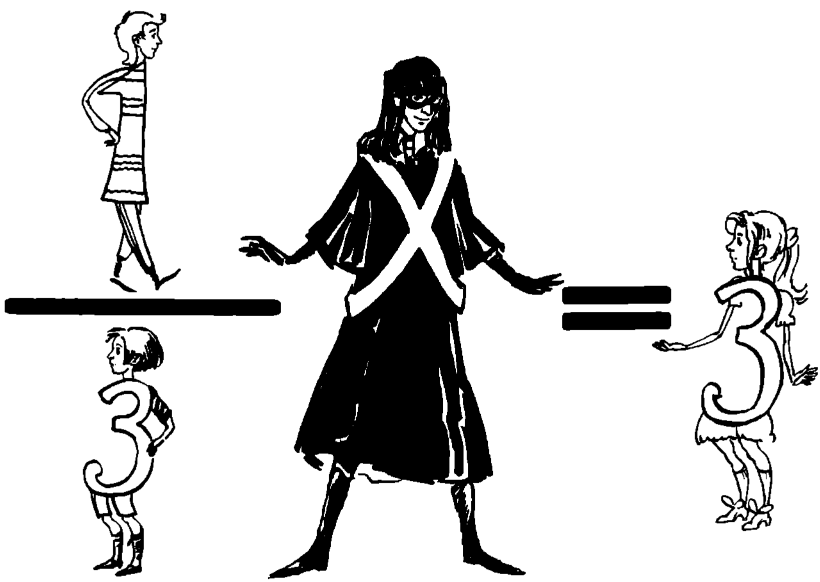
— Сейчас я скажу, ладно? Аль-джебр! Альмукабала!

Мы перенесли неизвестное вместе с коэффициентом из правой части равенства в левую и поменяли у него знак. Получилось:

$$x - \frac{2}{3}x = 3.$$

А это не что иное, как

$$\frac{1}{3}x = 3.$$



— Стало быть, Икс в три раза больше трёх, — сказала я.

— А раз так, значит, Икс равен девяти! — торжественно объявил Олег.

$$x = 9.$$

И как только он это сказал, чёрная маска упала на землю.

— Ура!!! — закричали мы.

— Ура! — подхватили жители Аль-Джебры.

Пока мы решали уравнение, они стояли так тихо, словно их вовсе не было. Зато теперь шумели и радовались вовсю. Особенно Икс. Он чуть не задушил нас в объятиях, а потом сплясал какой-то диковинный танец. Но больше всех веселился Пончик. Не переставая лаять, он перебегал от Севы к Олегу, от Олега — ко мне, прыгал, заглядывал в глаза и всё время норовил лизнуть в нос...

Только один участник нашей экспедиции вёл себя так тихо, что о нём чуть не позабыли: стручок.

Но о нём всё-таки вспомнили. Сева достал его из кармана. И как же мы удивились, когда вместо пустого стручка увидели целый! На плотной глянцевитой кожуре отчётливо обозначились бугорки. А внутри, как в уютном зелёном вагон-

чике, прижавшись друг к другу, лежали девять горошин.

Удивительный день! Я могла бы написать о нём ещё десять писем, но зачем? Скоро вернёмся в Карликанию и всё тебе расскажем сами.

Таня.

В глубь Аль-Джебры!

(Отряд РВТ – Нулику)

Дорогой Нулик! Первый раз пишем тебе втроём. И как ни странно, не ссоримся. Уж если мы вместе составили уравнение, написать сообща письмо для нас теперь сущие пустяки.

Как видишь, дни, проведённые в Аль-Джебре, многому нас научили. Особенно тот день, когда мы расколдовали Чёрную Маску.

Долго, до самого вечера, беседовали мы с альджебрийскими друзьями и поняли, что нам ещё пока хвастаться нечем. Мы ведь составили всего-навсего уравнение первой степени. А есть ещё и квадратные, и кубические, и уравнения четвёртой степени... И чем выше степень уравнения, тем труднее его решать. Альджебрийцы говорят, что даже учёные научились этому не сразу.

Правда, квадратные уравнения известны были давно. О них знали ещё древние китайцы и вавилоняне. Греческий математик Диофант умел уже решать некоторые уравнения более высоких степеней. Но он не нашёл единого способа решения. Это потому, что такие уравнения решаются с помощью отрицательных, иррациональных, мнимых чисел. Диофант же знал только об отрицательных, да и то не считал нужным ими пользоваться.

А ведь числа эти были известны задолго до Диофанта индийским учёным*[1]. От индийцев отрицательные числа перешли к арабам, которые завоевали Индию. Но арабским учёным они не понравились. Не нравились они и создателю алгебры Мухаммеду ибн Мусе аль-Хорезми. Потому-то он и восстанавливал отрицательные числа, превращал их в положительные. И признавал только такие уравнения, где в ответе получалось положительное число.

Через сто лет после Мухаммеда аль-Хорезми в том же Хорезме родился другой замечательный учёный. Имя у него ещё длиннее: Абу Рейха́н-Мухамме́д ибн Ахме́д аль-Бируни́ *[2]. Бируни был учёный-энциклопедист. Это значит, что он занимался многими науками: математикой, физикой, астрономией. Он изучал также ботанику, географию, историю, минералогию — науку о камнях — и ещё много других. Но в Аль-Джебре, конечно, больше всего интересуются его работами по математике. Бируни удалось решить интересное уравнение третьей степени. Но только одно!

Прошло ещё сто лет. В Средней Азии появился новый замечательный математик. Но о том, что он математик, знают не все. Он больше известен как великий поэт Ома́р Хайя́м*[3].

Оказывается, наука и искусство часто идут рука об руку. Таких случаев много.

Блез Паскаль был не только великим физиком и математиком, но и писателем, Михайло Ломоносов — поэтом. Первая русская женщина-математик Софья Ковалевская*4 писала романы и пьесы. Композитор Бородин*5, автор оперы «Князь Игорь», был талантливым химиком, соратником великого русского учёного Менделеева.

Рассказали нам и ещё одну забавную историю.

Ты, может быть, читал удивительную сказку «Алиса в Стране Чудес». Написал её английский писатель прошлого века Лью́ис Кэ́ррол. Сказка очень понравилась английской королеве. Она потребовала, чтобы ей доставили все сочинения этого замечательного сказочника. Принесли целую кучу книг. Королева открыла одну и тотчас захлопнула.

— Что вы мне принесли? — воскликнула она. — Вместо сказок здесь какие-то цифры. К тому же на обложке совсем другая фамилия. Не Кэррол, а Чарлз До́джсон!

Выяснилось, что «Алису в Стране Чудес» написал известный математик Доджсон, который подписывал свои литературные произведения псевдонимом Кэррол. А королеве принесли его математические труды.

Математика не мешала Доджсону заниматься литературой. Не мешала она и Омару Хайяму заниматься поэзией. А может быть, и помогала.

К сожалению, мы ещё не читали стихов Хайяма. Но говорят, что они отличаются удивительной точностью и краткостью. В стихотворение, состоящее всего из четырёх строк, поэт умудрялся вложить большое содержание. В его поэзии много метких наблюдений и глубоких мыслей. Потому так любят её люди всего мира. А математики почитают Хайяма ещё и за то, что он первый по-настоящему занялся общим решением уравнений третьей степени. Жаль только, что он пренебрегал отрицательными и мнимыми числами. Поэтому решение у него получилось неполное.

Много времени прошло, пока учёные поняли, что без этих чисел им не обойтись. Они стали применять их для решения алгебраических уравнений. И тогда дело пошло на лад.

В шестнадцатом веке итальянские учёные Тарта́лья и Карда́но научились решать любые уравнения третьей степени. Другой итальянский математик, Ферра́ри, придумал способ решения уравнений четвёртой степени [*6].

В тот вечер мы узнали ещё много интересного. Всего не опишешь да и не запомнишь как следует с первого раза. Но одно мы поняли и запомнили навсегда.

Алгебра создавалась веками. Её строили сотни, тысячи людей. Сначала это была маленькая постройка. Но постепенно она превратилась в огромное, сложное здание со множеством пристроек, башенок, переходов. Строительство его не закончено и не закончится никогда. Никто не знает, сможет ли он заложить хоть один камешек в стены этого здания. Такое удаётся не каждому. Зато каждый может войти в него и изучить то, что уже построено.

Вот тут-то мы и подошли к самому главному. Не хочется тебя огорчать, но лучше уж сразу сказать правду: не жди нас, Нулик. Мы решили идти дальше. Обидно останавливаться в самом начале пути. Ведь впереди столько неизведанного и увлекательного!

Конечно, мы не раз ещё с тобой встретимся. Грустно было бы думать, что мы расстаёмся навсегда! Все мы тебя очень полюбили и при первой же возможности приедем к тебе в гости.

А сейчас, чтобы ты не слишком расстраивался, прими от нас подарок: стручок. И ещё маску. Это уже от Икса. Он очень тепло вспоминает о вашей встрече. Ведь ты тоже помог ему найти потерянное лицо!

И вот ещё что. Это письмо, как всегда, передаст тебе наш бессменный почтальон Пончик. Пусть он остаётся у тебя. С ним тебе будет веселее путешествовать по Аль-Джебре. Если, конечно, ты когда-нибудь вздумаешь туда отправиться. А пока хватит с тебя и того, что ты узнал из наших писем. Всякому овощу своё время.

Крепко тебя обнимаем. Горячий привет маме Восьмёрке и всем карликанам.

Твои друзья из отряда РВТ: *Таня, Сева* и *Олег.*

Голицыно
Лето 1964 г.

Комментарии

*1 Достоверно известно о применении отрицательных чисел в Индии только с VII века нашей эры (а Диофант жил в III веке). Первым индийским математиком, использовавшим отрицательные числа, был Брахмагупта. Можно предположить, что эта идея пришла в Индию из Китая, где отрицательные числа применялись ещё во II веке до нашей эры.

*2 *Аль-Бируни* (973–1048) родился в Хорезме (территория современного Узбекистана). Сначала он работал в родном Хорезме и в Гургане на южном берегу Каспийского моря, а с 1017 года, после захвата Хорезма афганским султаном Махмудом Газневи, был принуждён переехать в столицу Махмуда Газну. После завоевания Махмудом Северной Индии аль-Бируни прожил в ней несколько лет. Аль-Бируни принадлежит большое число сочинений по истории, географии, филологии, астрономии, математике, геодезии, минералогии, фармакологии и геологии, а также «Канон Масуда» — огромный энциклопедический труд, в котором, помимо астрономии, имеются большие части, посвящённые тригонометрии, хронологии и географии. В тригонометрической части «Канона» содержится приближённое решение кубического уравнения.

*3 *Омар Хайям* (1048–1131) — знаменитый персидский поэт, философ, математик и астроном. Признание в математике Омар Хайям получил благодаря «Трактату о доказательствах проблем ал-джебры и ал-мукабалы» и «Трактату об истолковании тёмных положений у Евклида». В первом из них он создал общую теорию решения уравнений третьей степени. Во втором трактате Омар Хайям нашёл несколько эквивалентных формулировок постулата Евклида о параллельных прямых, внеся вклад в исследования, которые столетия спустя привели к созданию неевклидовой геометрии. Хайям прожил сложную, трудную жизнь. Смуты того времени заставили его много скитаться, познать и богатство и нужду. Он родился в городе Нишапур области Хорасан, исторически общей для таджиков и персов, жил и работал в разных городах Средней Азии и Ирана. Свои беды и радости Хайям воспел в бессмертных стихах — рубаи.

[*4] *Софья Васильевна Ковалевская* (1850–1891) — русский математик и механик. Несмотря на явную одаренность, путь в науку оказался для Софьи Ковалевской непростым, потому что в XIX веке наука считалась делом исключительно мужским. Но, несмотря на это, в 1874 году Гёттингенский университет (Германия) присвоил Ковалевской степень доктора, а через десять лет она стала профессором кафедры математики Стокгольмского университета. В 1888 году Софья Ковалевская получила премию Парижской академии наук за работу по теории вращения твердого тела.

Вот интересный факт из биографии Софьи Ковалевской:

В 1858 году отец Сони, генерал Корвин-Круковский, был уволен в отставку и семья переехала в загородное имение. К их приезду все комнаты в доме были оклеены новыми обоями, но на детскую обоев не хватило. Одна стена так и осталась оклеена лекциями профессора Остроградского по дифференциальному и интегральному исчислению. Девочка проводила целые часы перед этой таинственной, покрытой формулами стеной. В дальнейшем пятнадцатилетняя Соня за одну зиму усвоила весь курс дифференциального и интегрального исчисления, так как формулы были ей давно знакомы.

[*5] *Александр Порфирьевич Бородин* (1833–1887) — русский композитор, химик и медик. Бородин рано

проявил музыкальную одаренность, в девять лет написав свое первое произведение — польку. Но более всего Бородина привлекала химия, которая и стала его профессией.

В 1856 году он окончил петербургскую Медико-хирургическую академию, начал там преподавать и вскоре получил степень доктора медицины, а в 1864 году был избран профессором химии. Все свое время Бородин делил между научным трудом, преподаванием, музыкой и общественной деятельностью. Большую часть времени он уделял занятиям в академии, видя в них истинную цель жизни и смотря на музыку лишь как на «блажь». Тем не менее, именно его заслуги в области музыки принесли ему мировую известность. Наиболее значительным произведением Бородина считается опера «Князь Игорь», над которой он работал с перерывами в течение 18 лет. Она была поставлена в Мариинском театре в 1890 году уже после смерти Александра Бородина стараниями его друзей-композиторов, имела большой успех и до настоящего времени остаётся одним из самых ярких шедевров отечественного оперного искусства.

*6 Первым открыл формулу решения кубического уравнения математик из Болоньи Сципион дель Ферро. Дель Ферро нигде не опубликовал свой метод решения, но сообщил его своему ученику Антонио Марио Фиоре. Фиоре с успехом применял новый алгоритм на популярных тогда математических турнирах. На одном из таких турниров в 1535 году, уже после смерти дель Ферро, Фиоре встретился с математиком Никколо из Брешии, по прозвищу Тарталья (Заика). Тарталья, по его словам, самостоятельно открыл правило дель Ферро и решил все предложенные задачи. В 1539 году Тарталья передал описание этого метода Джероламо Кардано, который поклялся не публиковать его без разрешения Тартальи.

Несмотря на обещание, в 1545 году Кардано опубликовал этот алгоритм в работе «Великое искусство», и по этой причине он вошёл в историю математики как «формула Кардано». Кардано также включил в свою книгу ещё одно открытие, сделанное его учеником Луиджи Феррари, — общее решение уравнения четвёртой степени.

В защиту Кардано можно сказать, что он не присваивал себе чужих результатов, а честно сообщил в своей книге: «Сципион дель Ферро открыл формулу, согласно которой куб неизвестного плюс неизвестное равен числу. Это была очень красивая и замечательная работа... Соревнуясь с ним, Никколо Тарталья из Брешии, наш друг, будучи вызван на состязание с учеником дель Ферро по имени Антонио Марио Фиоре, решил, дабы не быть побеждённым, ту же самую проблему и после долгих просьб передал её мне».

СОДЕРЖАНИЕ

Пролог

Письма

Научные развлечения

Лёвшин Владимир Артурович
Александрова Эмилия Борисовна

Чёрная Маска из Аль-Джебры
Путешествие в письмах с прологом

Иллюстрации *Натальи Исаичевой*

Для среднего школьного возраста

Главный редактор *В. Мещеряков*
Выпускающий редактор *О. Афанасьева*
Художественный редактор *Е. Васильева*
Технолог производственного отдела *Л. Кабикова*
Корректоры *Г. Вулисанова, Н. Власенко*
Вёрстка *А. Петровой*

Директор Группы компаний
«Издательский Дом Мещерякова» А. Мещерякова

Подписано в печать 09.08.2012.
Формат 84 × 108/32.
Гарнитура Petersburg. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Усл. печ. л. 11,78.
Тираж 3000 экз. Зак. 6657

Издательский Дом Мещерякова
107078, Москва, ул. Новая Басманная, д. 23, стр. 2, к. 213
Телефон: (499) 265-32-08
E-mail: idm@idmkniga.ru
www.idmkniga.ru

Отдел реализации: тел./факс (499) 267-66-58

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами
в ОАО «Первая Образцовая типография»,
филиал «УЛЬЯНОВСКИЙ ДОМ ПЕЧАТИ»
432980, г. Ульяновск, ул. Гончарова, 14